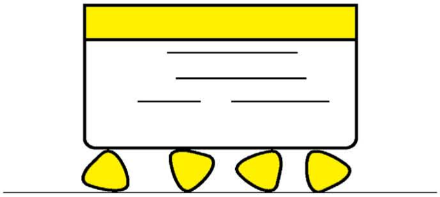
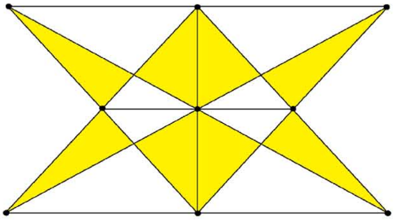
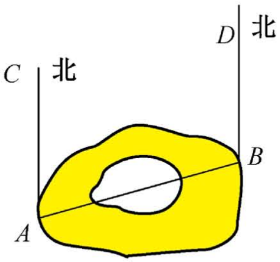
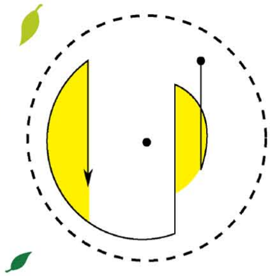


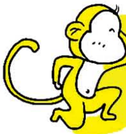
引领数学风暴



我超喜欢的趣味数学书

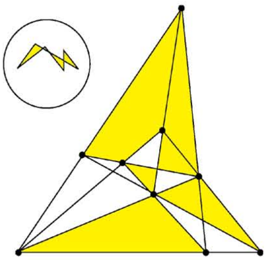


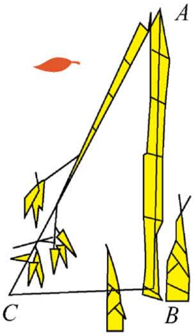




初中二年级

佟 妲 邢书田 邢 治 编著





初中数学思维培养经典读物

趣题详解，集知识性、趣味性、娱乐性于一体

别把数学想象为硬邦邦的、胡搅蛮缠的、令人讨厌的、有悖于常识的东西，它只不过是赋予常识以灵性的东西。

——（英）开尔文

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

引领数学风暴

我超喜欢的趣味数学书

初中二年级

佟　妲　邢书田　邢　治　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

我超喜欢的趣味数学书. 初中二年级 / 佟姐，邢书田，邢治编著. —北京：电子工业出版社，2013.7
（引领数学风暴）

ISBN 978-7-121-20386-2

Ⅰ. ①我… Ⅱ. ①佟…②邢…③邢… Ⅲ. ①中学数学课—初中—课外读物 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 098217 号

策划编辑：贾 贺 徐云鹏
责任编辑：张 京 文字编辑：张岩雨
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：720×1 000 1/16 印张：7.75 字数：185 千字
印 次：2013 年 7 月第 1 次印刷
定 价：22.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

编 者 的 话

本套丛书参照九年制义务教育初中数学教学大纲，在初中代数和初中几何的教学要求框架下编写。它涵盖算术趣题、代数趣题、几何趣题、组合趣题、数论趣题、图论趣题、概率趣题、分割趣题、博弈趣题和逻辑趣题等趣味数学各个领域。趣题详解集知识性、趣味性、娱乐性于一体，最大限度地满足初中学生乃至所有数学爱好者对数学学习的向往。

正如古希腊人所说，人类知识殿堂是由两根柱子支撑的，一根是文学，一根是数学。教育的目的是教人智慧，数学令人“智”，文学使人“慧”；“智”是逻辑推理，“慧”是直觉顿悟。本套丛书是数学与文学的有机结合。

本套丛书具有重大教育学价值，趣题就是“聪明”的象征，兴趣刺激创造，创造获得成果。这一点将被更多的教师、家长、学生和所有数学爱好者所认识。正如曾获得国际性数学最高奖——“菲尔兹奖”的符拉基米尔·弗沃特斯基所说：“数学很美，数学很有趣，数学很有竞争性，它是世界上最聪明的人玩的游戏”。

本套丛书分三册：七年级、八年级和九年级。它让每一朵鲜花都绽开希望，让每一片绿叶都摇曳出生机！让每一位读者都站在数学的肩膀上开创未来！

本书编者

2013 年 5 月

目　　录

一、数 学 趣 题

整数和分数统称为有理数，任何一个有理数都可以写成分数 m/n（m，n 都是整数，且 $n\neq0$）的形式．从而有理数又称为分数．分数希腊文称为λoϒo，原意为“成比例的数”（rational number）的意思，但中文翻译不恰当，逐渐变成“有道理的数”．

有理数可包括：

（1）整数：正整数、0 和负整数．

（2）分数：正分数和负分数．

任何一个有理数都可以用数轴上的点来表示．其中包括整数和通常所说的“分数”，此“分数”乃为有限小数或无限循环小数．

01．玩具猫之谜

两位美国专家去埃及参观金字塔．

一天，工程专家独自在街头闲逛，忽见一个老妇人在卖一只非常精致的玩具猫．标价是 500 美元．

那老妇人说：“这是自家祖传宝物，眼下只因孙子病重，无钱住院，才迫不得已拍卖的．”

专家用手掂了掂，猫体很重，全身黑色，像是黑铁铸成，一双眼炯炯有神，凭着他丰富的知识，断定这两只眼确实是两颗货真价实的珍珠．

工程师说：“我只买下两只猫眼，给你 300 美元，可以吗？”

老妇人同意了．

工程师高兴地回到宾馆，对同伴说：“我只花了 300 美元，便买下了这两颗硕大的珍珠．”

这位同伴是个逻辑学家，见这两颗大珍珠，少说也值上千美元．便问是怎么回事．

工程师如实地讲述了事情的经过．

听完了工程师的叙述后，逻辑学家二话没说，飞快地奔向街头．

一会儿工夫，逻辑学家拿着那没了双眼的黑猫回来了．

“多少钱？”工程师问．

“200 美元．”逻辑学家答，“标价 500 美元，已卖了 300 美元，再给她 200 美元，卖主不是如愿以偿吗！”

工程师不禁嘲笑地说："你真愚笨，这没了双眼的铁猫，怎么能值 200 美元呢？"

逻辑学家没说话，只是用手不停地掂量他的黑猫.

"上当了吧？"工程师仍不停地说三道四.

逻辑学家胸有成竹，态度从容，只是不说话．突然他灵机一动，拿出小刀，细心地刮着猫脚．当一层黑色脱落后，他一阵惊喜："你瞧，我上当了吗？"工程师一见，惊得目瞪口呆，原来愚蠢的是自己，赚了大钱的却是逻辑学家.

你知道这是为什么吗？

解析：原来这只黑猫通体是用纯金铸造的．铸造这只金猫的主人，怕金身暴露，便用黑漆将猫身涂盖起来，外表酷似黑铁.

工程专家虽然知识渊博，能识别真假珍珠，可是他缺乏逻辑学家的思维艺术，分析、判断不全面、不深入.

在逻辑学家看来，玩具猫是个整体，既然猫眼是用珍贵的珍珠做成，那么猫体不会用黑铁这种不值钱的金属铸造，表面的颜色很可能是假象．事实证明逻辑学家的判断是正确的.

02. 到底有哪些硬币

"请帮我把 1 美元的钞票换成硬币"．一位顾客提出这样的要求.

"很抱歉"，出纳员琼斯小组仔细查看了钱柜后答道："我这里的硬币换不开".

"那么，把这 50 美分的硬币换成小币值的硬币行吗？"

琼斯小组摇摇头，她说，实际上连 25 美分、10 美分、5 美分的硬币都换不开.

"你到底有没有硬币呢？"顾客问.

"噢，有！"琼斯小组说，"我的硬币共有 1.15 美元．"

钱柜中到底有哪些硬币？

注：1 美元合 100 美分，小币值的硬币有 50 美分、25 美分、10 美分、5 美分和 1 美分.

解析：如果琼斯小姐换不了 1 美元，那么她钱柜中的 50 美分硬币不会超过 1 枚．如果她换不了 50 美分，那么钱柜中的 25 美分硬币不会超过 1 枚，10 美分硬币不会超过 4 枚，10 美分换不了，意味着她的 5 美分硬币不会超过 1 枚；5 美分换不了，那么她的 1 美分硬币不超过 4 枚，因此，钱柜中各种硬币数目的上限是:

50 美分 1 枚　　0.50

25 美分 1 枚　　0.25

10 美分 4 枚　　0.40

5 美分 1 枚　　　0.05

1 美分 4 枚　　　0.04

$1.24

这些硬币还够换 1 美元（例如，50 美分和 25 美分各 1 枚，10 美分 2 枚，5 美分 1 枚），但是我们毕竟知道了钱柜中各种硬币的数目不可能比上面列出的更多，上面这些硬币加起来总共有 1.24 美元，比我们所知道的钱柜中的硬币总值 1.15 美元正好多出 9 美分.

现在，组成 9 美分的唯一方式是 1 枚 5 美分硬币加上 4 枚 1 美分，所以必须把这 5 枚硬币从上面列出的硬币中除去，余下的是 1 枚 50 美分、1 枚 25 美分和 4 枚 10 美分的硬币. 它们既换不了 1 美元，也无法把 50 美分或者 25 美分、10 美分、5 美分的硬币换成小币值的硬币，而且它们的总和正好是 1.15 美元，于是我们便得到了本题的唯一答案.

答：钱柜中的硬币总值为 1.15 美元.

03. 巧运莱菔

一个商人骑一头驴要穿越 1000 千米长的沙漠，去卖 3000 根莱菔. 已知驴一次可驮 1000 根莱菔，但每走 1 千米又要吃掉 1 根莱菔. 问：商人最多可卖出多少莱菔？

注：莱菔，俗称萝卜.

解析：因为驴每次最多驮 1000 根，那么为了最大限度地利用驴，第一次卸下的地点应该是使莱菔的数量为 2000 根的地点.

因为一开始有 3000 根莱菔，驴必须要驮三次，设驴走 x 千米第一次卸下莱菔，

则：$5x=1000$（吃莱菔的数量，也等于所行走的千米数）

$x=200$，也就是说第一次只走 200 千米.

验算：驴驮 1000 根走 200 千米时剩 800 根，卸下 600 根，返回出发地.

前两次就囤积了 1200 根，第三次不用返回则剩 800 根，则总共是 2000 根莱菔了.

第二次驴只需要驮两次，设驴走 y 千米第二次卸下莱菔，

则：$3y=1000$，$y=333.3$

验算：驴驮 1000 根走 333.3 千米时剩 667 根，卸下 334 根，返回第一次卸莱菔的地点，第二次在途中会吃掉 334 根莱菔，到第二次卸莱菔地点是加上卸下的 334 根，刚好是 1000 根.

而此时总共走了：200+333.3=533.3 千米，而剩下的 466.7 千米只需要吃 466 根莱菔.

所以可以卖出莱菔的数量就是 1000−466=534（根）.

答：商人最多可卖出 534 根莱菔.

04. 汤姆赶牛

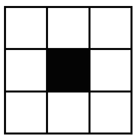
农夫汤姆要拉 4 头牛到对面的一个村子（对村）. 4 头牛从本村到对村，大牛要走 1 小时，二牛要走 2 小时，三牛要走 4 小时，四牛要走 5 小时. 现准备一次同时拉走两头牛，回来时还要骑回来一头牛，两头牛以走得慢的那头所需要的时间为正常时间. 请问，你最少得花多少时间使 4 头牛从农夫所在的村子到对面的那个村子？

解析：三牛和四牛要同时走，因为以走得慢的牛所需的时间计算，只有这样才能有利于节省时间；另外，回来时要骑跑得快的牛，三牛和四牛根本不行，大牛最好. 以此为原则，最好的办法就是：（1）把大牛和二牛牵到对村（2 小时）；（2）骑上大牛，回到本村（1 小时）；（3）把三牛和四牛牵到对村（5 小时）；（4）骑上二牛，回到本村（2 小时）；（5）最后把大牛和二牛牵到对村（2 小时）.

答：4 头牛从农夫所在的村子到对面的那个村子最少得花 12 小时.

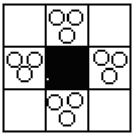
05. 站岗的士兵

下图的正方形表示一个城堡，四周 8 个小方格分别表示岗楼. 士兵可在岗楼里站岗，每个岗楼最多可容纳 3 个士兵. 现在要求城堡每边三个岗楼里站岗的士兵个数和是 3，请给出一些不同的站岗方法，并画出图形.

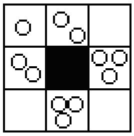


解析：我们分析 8 个岗楼的特点，可以把它们分成两类，一类是位于角上的四个岗楼，站在这里面的士兵可以同时守卫两条边，像这样的岗楼我们称为“共享区”，其余四个岗楼我们称为“独享区”，我们在画图时，可以以共享区的人数由少到多考虑，各种站岗方案如下.

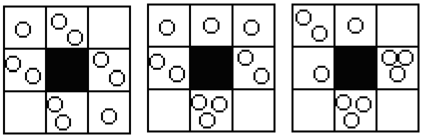
（1）共享区里一个人也没有：



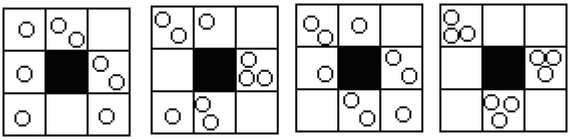
（2）共享区只有一个人:



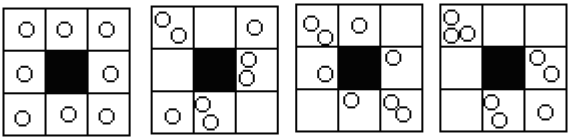
（3）共享区里有两个人:



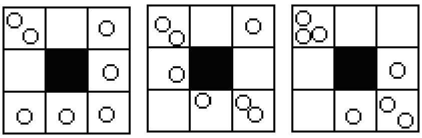
（4）共享区里有 3 个人:



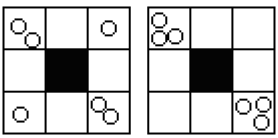
（5）共享区里有 4 个人:



（6）共享区里有 5 个人:



（7）共享区里有 6 个人:



06. 净赢一美元

“小雨转雪”，气象员这样预报．其实这小雨并不小．“我们肯定出不去了．”吉姆一边抱怨一边环顾那些来参加他生日聚会的小伙伴们，“不如我们玩扑克牌游戏怎么样？”

扑克牌找来了，大家围坐在大桌子旁．

“上次是你一连赢了三局后停下来的，这不公平．”琼提醒他哥哥，“这次我们约定：要在每人都赢一次时才能停下来！”

“好吧！听我说，”吉姆宣布道：“每局游戏输的人每人要拿出 5 美分放在桌子上作为共有金，而胜者则可从中拿走 25 美分．最后一局胜的人将桌上的共有金全部拿走．”

这似乎是一个好主意，于是他们便开始玩起来．吉姆生日，运气极佳，他虽然只赢了一局，但却赢了最后一局，扣去前面输的，还净赢了 1 美元．试问：共有多少人参加游戏，他们共玩了多少局？

解析：假设有 x 人参加游戏，他们共玩 y 局．在最后一局之前的每一局，共有金增加量为：$5(x-6)$美分．于是，在最后一局开始时桌面上的共有金有 $5(x-6)(y-1)$ 美分．

而在最后一局前人共有金 $5(x-1)$ 美分，此时桌面上的共有金为：

$5[(x-6)(y-1)+(x-1)]=5(xy-6y+5)$

吉姆在前 $(y-1)$ 局中输了 $5(y-1)$ 美分，但最后一局赢了，清扫了桌面上所有的共有金，而且净赢一美元．于是 $5(xy-6y+5)-(5y-1)=100$，

因此 $y(x-7)=14$，因为每个参加游戏的人都至少赢一次，所以 $y \geqslant x$，且 x、y 是整数，由此 $y=14$，$x-7=1$，$x=8$.

答：共有 8 人参加游戏，他们一共玩了 14 局．

二、线段、角与平行线

射线只有一端有端点，另一端可无限延长；线段有 2 个端点，而 2 个端点间的距离就是这条线段的长度；直线除了“直”这个特点外，还有一个很重要的特点，那就是它可以向两个方向无限延伸，永远没有尽头，所以，直线是不可能度量的．因此，在画直线时，要画出没有端点的直线，表示可以无限延伸．

具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角（angle）．这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的两条边．

锐角：大于 0°，小于 90° 的角叫做锐角．

直角：等于 90° 的角叫做直角．

钝角：大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角．

平角：等于 180° 的角叫做平角．

在同一平面内，永不相交的两条直线互为平行线．

平行性质可简单说成：

（1）两条直线平行，同位角相等．

（2）两条直线平行，内错角相等．

（3）两条直线平行，同旁内角互补．

（4）两条直线平行，外错角相等．

07．九树十行

春分艳阳暖，园中植树忙；每行栽三株，九株栽十行；种法有多样，请你试试看．

解析：这是一个常见的智力测验题，又称牛顿问题．在一般书刊上，这道题的答案只有一个对称图形，如图 1 所示．

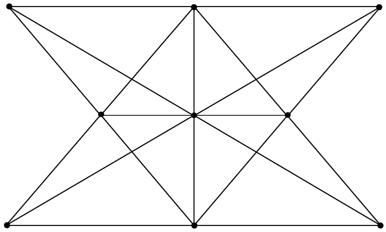


图 1

其实，利用几何知识，还能得到一些不对称图形的答案，见图 2 至图 5．在图 2 至图 4 中，各有一个圆圈，里面画着一个一般意义上的六边形（六条线段顺次首尾相连组成的封闭折线）．这是在提示，图中的 10 条直线里，有 6 条直线组成圈内形状的一个六边形．

在图 5 中，六边形看得比较清楚，就是用字母标注出来的六边形 $ABCDEF$．这使我们想起，在普斯定理一文中解答过“九树九行”问题．

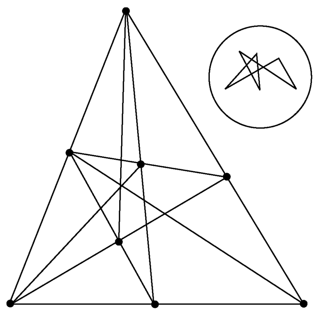


图 2

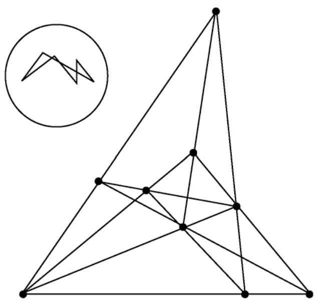


图 3

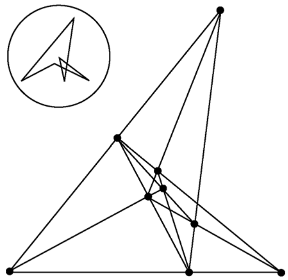


图 4

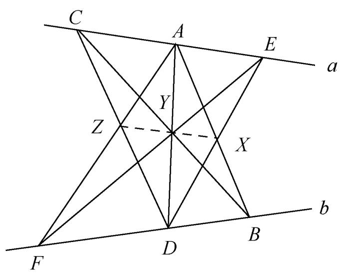


图 5

为了解答现在的“九树十行”问题，需要在上节“九树九行”的基础上，增加一条新的直线，成为第十条．应该怎样安排，才能出现第十条直线呢？

答：在图 5 中，AYD 就是新增加的第十条直线．要得到这条直线，可采用下面的办法：如图 5 所示，任意作两条直线 a 和 b；在 a 上任意取三点 A、C、E；在 b 上任意取两点 B、D；连接直线 AB、BC、CD、DE、AD，记 AB 与 DE 的交点为 X，BC 与 AD 的交点为 Y；连接直线 EY，交直线 b 于点 F；连接直线 FA，交 CD 于点 Z，那么根据帕普斯定理，三点 X、Y、Z 在一直线上．

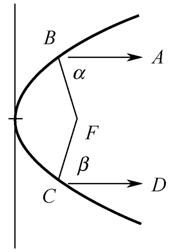
这就是解答“九树十行”问题的一般方法．由于两直线 a 和 b 的相关位置可以任意变化，六边形顶点在 a 和 b 上的排列顺序和距离也可大幅度调节，所以能画出千变万化的解答图形．如果不考虑距离和角度的差异，而只看点和线的排列顺序，大致可分 4 类，就是这里的图 2 至图 5．通常书刊中见到的图 1，是图 5 的特殊情形．

“九树十行”问题表明，在熟知的浅显趣题后面，有时会隐藏着深刻的数学道

理．前有芳草地，万紫千红，百花争艳；后有大山林，枝繁叶茂，郁郁葱葱．通过有趣的事实，接触有用的知识，何乐而不为？

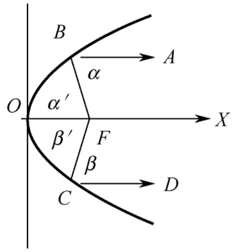
08．探照灯趣题

探照灯、锅形天线、汽车灯以及其他很多灯具都与抛物线形状有关，如下图是一探照灯灯碗的纵剖面，从位于 F 点的灯泡发出的两束光线 FB、FC 经灯碗反射以后平行射出．如果下图中$\angle ABF=\alpha$，$\angle DCF=\beta$，则$\angle BFC$ 的度数为多少？



解析：过 F 点向左作射线 FO，使 $FO\parallel AB$，则 $FO\parallel CD$，

$\therefore \angle ABF=\angle BFO=\alpha$（$\alpha=\alpha'$，同位角相等），$\angle OFC=\angle FCD=\beta(\beta=\beta')$，即 $\angle BFC=\alpha'+\beta'=\alpha+\beta$



答：$\angle BFC$ 的度数等于 $\alpha+\beta$．

点评：本题已经有两条平行线，但是它们之间没有截线，需要构造第三条平行线，才能使用平行线的性质．过焦点 F 的直线经抛物线反射后，反射线与 X 轴平行．

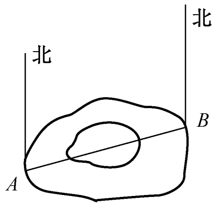
09．山岭隧道

天堑总能变通途，人类的智慧除了建造广厦，很大程度上都体现在交通的开发中．面对高山阻挡，人们总能开山凿洞，缔造一个个令人惊叹的隧道奇观．

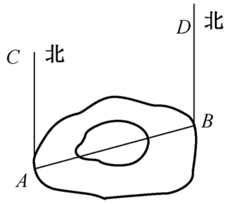
如下页图所示，修高速公路需要开山洞，为节省时间，要在山的 A，B 两面同

时开工，在 A 处测得洞的走向是北偏东 76° 12′，那么在 B 处应按什么方向开口，才能使山洞准确接通，请说明其中的道理.

（2005 年泰安市中考题）



解析：见下图：



$\because AC \parallel$ DE，

$\therefore \angle ABE=\angle A=76°\ 12'$（两直线平行，同旁内角互补），

答：在北偏西 76° 12′ 方向开口，才能使山洞准确接通.

10. 等宽曲线

圆是与一个定点的距离等于定长的所有点组成的曲线．车轮就直接地应用了圆的这个性质．车轮正是由于它的等长的车辐，使车轴处于一定的高度，从而得到一个平稳的水平运动．倘若车轮不是圆的，那么车轴将会产生一种忽上忽下的运动．运动中如果有很大的载重，轮和轴就不能保持十分坚固．

有时我们要移动重物，可以如图 1 那样把重物放在圆木棍上滚动，并平稳地前进．圆可用来滚动的原因是由于圆有这样的性质，即当圆不管怎样滚动时，圆的任何一对平行切线的距离总是相等的．即圆在任意方向都有相同的宽度，因而圆也就是所谓的“等宽曲线”．

然而令人惊讶的是，对于完成流动所需要的性质来说，棍的横断面未必是圆的!

事实上存在着大量的非圆等宽曲线，最简单的等宽曲线不是圆，而是如图 2 所示的曲边三角形．它的画法如下：

1．画一个等边三角形；

2．以所作的等边三角形的三个顶点为圆心，边长为半径，作各内角所对的圆弧．

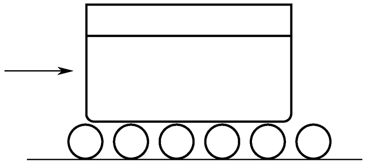


图 1

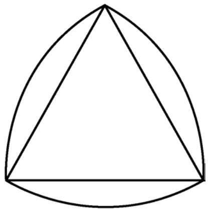


图 2

显然，这个等宽曲线的宽度等于原来等边三角形的边长．请你亲自动手做个实验．把一硬纸卡片剪出一个如上所画的等宽曲线的样子，而用另一硬纸卡片剪下一个正方形的洞．如果正方形的边长等于曲线的宽度，那么不管方向怎样变化，它正好合适地装入这个曲线板，并且这个等宽曲线板可以在正方形内紧密无间地自由转动（如图 3 所示）．实际上，任何等宽曲线都可以在边长等于曲线宽度的正方形内紧密无间而自由地转动；反之，可以在正方形内紧密而自由地转动的曲线也是等宽曲线．

用这种等宽曲线做横断面的滚子，也能使载重物水平地移动，而不至于上下颠簸（如图 4 所示）．这种具有奇特功能的曲边三角形，是由工艺学家鲁列斯首先发现的，所以也称为鲁列斯曲边三角形．

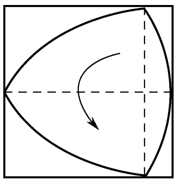


图 3

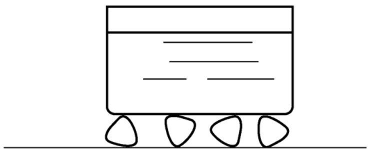


图 4

在鲁列斯的等宽曲线上有尖点，即在两条圆弧相交处形成角顶．我们希望它光滑一些，可以按下面的方法得到没有任何角顶的新的等宽曲线：把等边三角形的各边向两个方向延长相等的一段；以三个顶点为圆心画圆弧，使得三个内角所对的圆弧的半径，等于边长与延长线的长度的和；内角的对顶角所对的圆弧，等于延长线的长．由这样的六条圆弧组成的等宽曲线克服了尖点，因此光滑多了（如图 5 所示）．

画等宽曲线的关键的想法是：圆弧的中心是它所对的角顶．下面介绍一种等宽的曲边多边形的一般画法，并使它的宽度为 b．开始可以把任意点 B 作为第一个角顶，以 B 为圆心、b 为半径画弧；在这个弧上，选择 A 和 C 两点作为新角顶，以 C 为圆心、b 为半径画弧（该弧必经过 B）；在这个弧上，选择另一个角顶 D，以 D 为圆心、b 为半径画弧（该弧必经过 C），如果我们希望结束这个过程，可以在这个弧上选择角顶 E，使它也处在以 A 为圆心、b 为半径的弧上（该弧必经过点 B）．也

就是 E 是两个弧的交点．最后，用一个以 E 为圆心、b 为半径的弧连接 A 和 D，这样就得到一个等宽的曲边五边形 $ADBEC$（如图 6 所示）．边数更多的多边形，可用同样的方法做出来，这只要多做几步，然后使曲线成为闭合的就可以了．

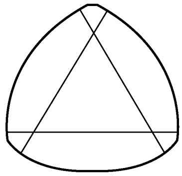


图 5

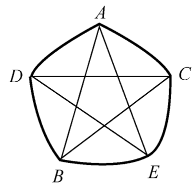


图 6

同样的原理，我们还可以利用这些曲线得到没有任何角顶的等宽曲线．

这些方法使我们可以构造无数个等宽曲线，它们都是由许多圆弧组成的．但不要误解为等宽曲线只能由圆弧组成，实际上有这样的等宽曲线，它的一部分不管是多么小，都不是圆弧．在这里我们不可能介绍它，因为已经超出了初中几何知识的范围．

日常生活中，我们看到许多加盖的盛具，如锅、杯、壶、缸和桶之类，都是圆口圆盖的形状．这除了容易加工制造以外，主要还是应用了圆是等宽曲线的特性．圆形的盖子，只要它不变形，从任何方向都不会掉进盛具里去．为了提高观赏价值与品茶雅兴，一些艺术茶壶的壶盖可以设计成其他等宽曲线的形状．

在图 1 中，车轮向前移动 1m，上面的重物会向前移动多远？

解析：滚轮向前移动 1m，是相对于地面而言，上面的重物相对于车轮也向前移动 1m. 上面的重物相对于地面移动 2m.

答：重物向前移动 2m.

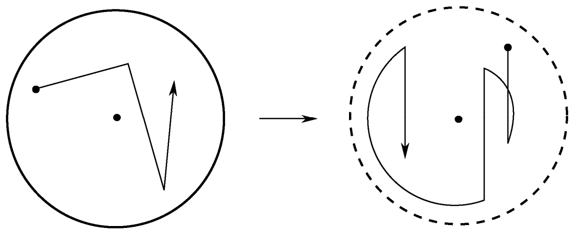
11. 舞台里的狮子窗体顶端窗体底端

有一个半径为 10 米的圆形舞台，初始时舞台上的某个地方有一头狮子．这头狮子在舞台上以折线段的方式跑了 30 千米．

求证：在整个过程中，这头狮子至少转了 2998 个弧度．

证明：现在，让我们站在狮子的角度，用狮子的眼光来看周围的世界．这样，狮子本身就是静止不动的，运动的其实是整个舞台；再假设狮子的头也是始终朝北的，狮子原地旋转实际上就是整个舞台绕着它作圆周运动．这样一来，舞台中心的运动就只有两种形式：竖直向下的直线运动，以及以狮子为中心的圆弧运动．如下页图所示，左图就是在我们看来，狮子的移动轨迹，其中圆心代表舞台中心；右图

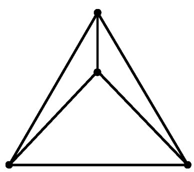
就是在狮子的眼中，舞台中心的移动轨迹，其中圆心代表狮子．注意，由于舞台始终包含了狮子，因此舞台中心绝不可能跑出狮子周围 10 米的范围．因此，每段直线运动都不能持续太久．我们需要不断靠圆弧运动上调舞台中心的位置，让它有继续竖直向下移动的空间．



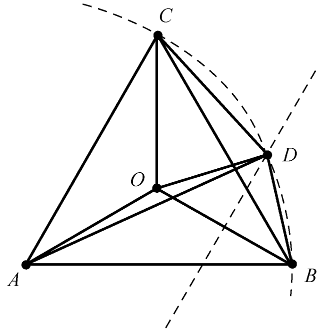
由于舞台中心一共下降了 30 000 米，但舞台中心的初始位置最多只能比终点位置高出 20 米，因而在整个过程中，舞台中心的高度至少还要靠圆弧运动上调 29 980 米．因此，圆弧运动的总路程也就至少有 29 980 米（事实上，由于两点之间线段最短，走弧线绕了弯路，因此实际路程比 29 980 米大得多）．如果每段圆弧的半径都是 10 米，那么所有圆弧的度数之和就应该有至少 2998 弧度；何况绝大多数圆弧的半径都小于 10 米，因此圆弧的总度数就更大了．这就说明了，在整个过程中，狮子至少转了 2998 个弧度．

12. 五点十线

图中的四个点之间一共有 6 条线段，它们满足：有一种长度恰好出现 1 次，有一种长度恰好出现 2 次，有一种长度恰好出现 3 次．是否存在平面上的五个点，它们之间的 10 条线段满足有一种长度恰好出现 1 次，有一种长度恰好出现 2 次，有一种长度恰好出现 3 次，有一种长度恰好出现 4 次？

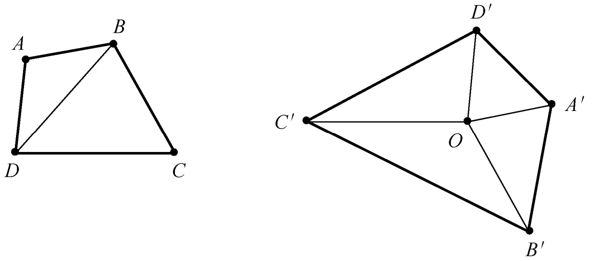


解析：下页图是一个简单的构造：$\triangle ABC$ 为等边三角形，O 为其中心．以 A 为圆心，AB 为半径作弧，OB 的中垂线与这段弧相交于点 D．则这五个点满足要求．

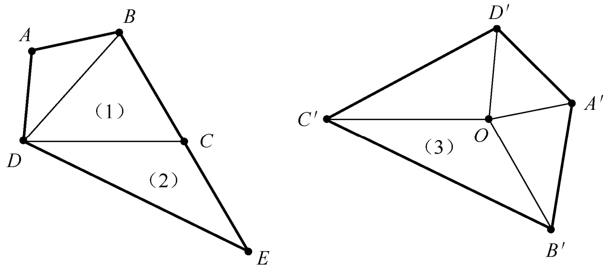


13. 四边形的面积之比

给定任意四边形 $ABCD$ 和四边形外一点 O．把 AB 平移到 OA'，把 BC 平移到 OB'，把 CD 平移到 OC'，把 DA 平移到 OD'，如下图所示．求两个四边形的面积之比．



解析：如下图所示，延长 BC 到 E，使 $CE=BC$，于是三角形（1）和（2）面积相同（底和高相等）．而显然三角形（2）和（3）全等，因此（1）和（3）面积相同．同理可知，右边这个四边形中的四个三角形事实上分别与△ABC、△BCD、△CDA、△DAB 等积，因此右边这个四边形的面积是左边的两倍．

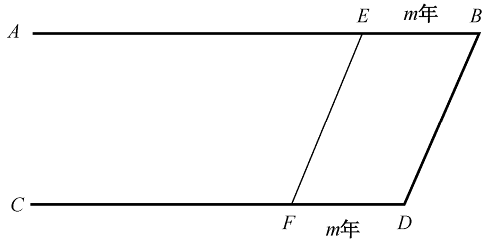


14. 巧算年龄

娜仁托雅（彩霞）和格根塔娜（明珠）是蒙古族一对多年未见的好朋友，好姐妹在一次偶然会面中谈起年龄：

娜仁托雅说她现在的年龄是 m 年前格根塔娜年龄的 2 倍，格根塔娜说是的，她现在的年龄与 m 年前娜仁托雅的年龄相同，二人现在的年龄之和为 56 岁，问娜仁托雅和格根塔娜现在年龄各是多少？

解析：如下图所示两条平行线 AB、CD 分别代表娜仁托雅和格根塔娜的年龄，连接 BD，在 AB 上取点 E，使 EB 等于 m，作 $EF \parallel BD$，则 AE、CF 代表 m 年前娜仁托雅和格根塔娜的年龄.



根据“娜仁托雅的年龄是 m 年前格根塔娜年龄的 2 倍”知 $AB=2CF$，根据“格根塔娜的年龄与 m 年前娜仁托雅的年龄相同”知 $CD=AE$，

于是 $CD=AB-EB=AB-(CD-CF)=\frac{3}{2}AB-CD$，故 $CD=\frac{3}{4}AB$.

再根据“二人现在的年龄之和为 56 岁”，得 $CD+AB=56$，$\therefore CD+AB=\left(1+\frac{3}{4}\right)AB=56$，娜仁托雅年龄 $AB=\frac{4}{7}\times 56=32$（岁），格根塔娜年龄 $56-32=24$（岁）.

答：姐姐娜仁托雅和妹妹格根塔娜的年龄分别是 32 岁和 24 岁.

15. 直尺的妙用

在下面的问题中，你不能使用圆规，只能使用直尺作图．不过，你的直尺拥有两条平行边，你可以在作图时同时使用它们．你需要充分利用直尺的这个特点，完成下面几个作图任务．

（1）作出已知角的角平分线；

（2）作出已知线段的中点；

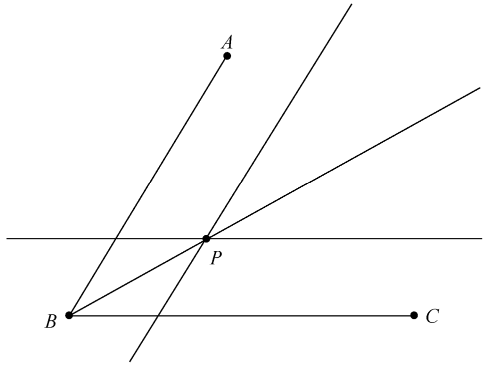
（3）作出已知圆的圆心；

（4）过已知点作已知直线的平行线.

假设你的直尺是无限长的．直尺的宽度是固定不变的．直尺不能用来度量长度.

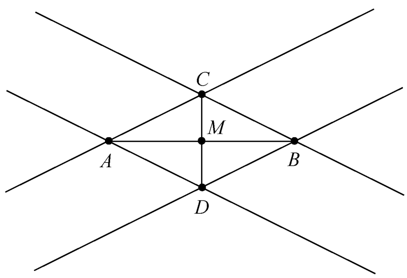
其实，满足要求的作图方案是很多的，下面只给出一种比较常见的解答.

（1）作出$\angle ABC$的角平分线.



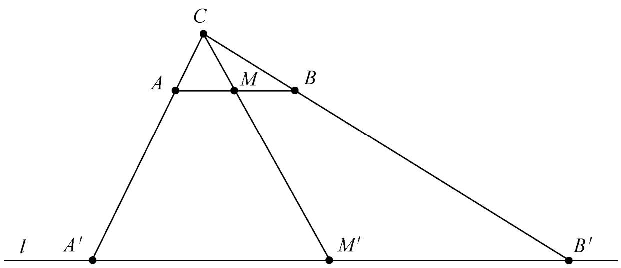
如上图所示，我们利用尺子的宽度，把角的两边各自都向内平移一个相同的距离，交点 P 与顶点 B 的连线就是角平分线.

（2）找出已知线段 AB 的中点.



如果 AB 的距离大于尺子的宽度，那么，我们把尺子卡在两点之间，用两种不同的方法作出过这两点的平行线. 两组平行线交于 C、D 两点. 容易看出，四边形 $ADBC$ 是一个菱形，那么 CD 和 AB 的交点 M 就是 AB 的中点．事实上，我们不但作出了 AB 的中点，还顺带作出了 AB 的垂直平分线（一会儿会用到）.

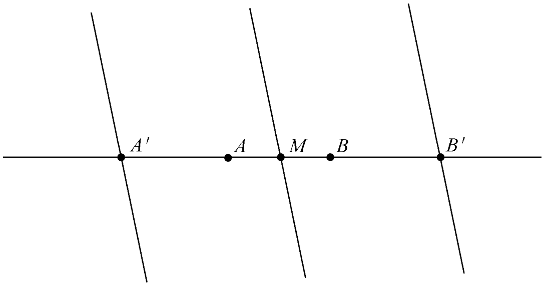
但是，如果 AB 的距离小于尺子的宽度呢？



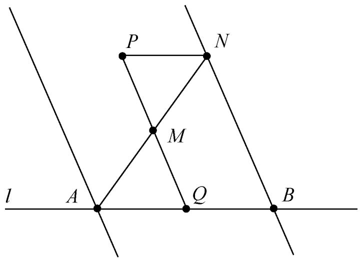
如上图所示，借助尺子的宽，作出 AB 的一条平行线 l．然后，找出距离 AB 足够近的一点 C，使得 CA 与 l 的交点 A'以及 CB 与 l 的交点 B'这两个交点之间的距离超过尺子的宽度．然后，用刚才的方法找出 $A'B'$的中点 M'，连接 CM'与 AB 交于点 M，M 就是 AB 的中点了．

（3）找出已知圆的中心．我们只需要随便选取两条弦，作出它们各自的垂直平分线，两条垂直平分线的交点就是圆的中心．关键在于，怎样作线段的垂直平分线呢？下面我们就来讨论作出已知线段 AB 的垂直平分线的方法．

当线段 AB 的长度大于尺子的宽度时，我们已经有办法作出它的垂直平分线了．如果线段 AB 的长度小于尺子的宽度，那么我们先作出 AB 的中点 M，然后过 M 任意作一条直线．接着，借助尺子的宽度，把这条直线向左和向右平移相同的距离，与 AB 所在直线交于 A'和 B'．那么，$A'B'$的距离就超过了尺子的宽度．作出 $A'B'$的垂直平分线，它也就是 AB 的垂直平分线了，如下图所示．



（4）已知直线 l 和直线外一点 P，过点 P 作出 l 的平行线，如下图所示．



我们先在直线 l 上任取一点 Q，连接 PQ，并找出 PQ 的中点 M．然后，借助尺子的宽度，把 PQ 向左和向右平移相同的距离．假设 PQ 左边的平行线与 l 交于点 A，连接并延长 AM，与 PQ 右边的平行线交于点 N．那么 PN 就是直线 l 的一条平行线．

这个有趣的问题来自 1967 年 IMO（国际数学奥林匹克）候选题．

三、最短路径问题

最短路径问题是图论研究中的一个经典问题，旨在寻找图（由结点和路径组成的）中两结点之间的最短路径．

算法具体的形式包括：确定起点的最短路径问题——即已知起始结点，求最短路径的问题．

确定终点的最短路径问题与确定起点的问题相反，该问题是已知终结结点，求最短路径的问题．在无向图中该问题与确定起点的问题完全等同，在有向图中该问题等同于把所有路径方向反转的确定起点的问题．

确定起点终点的最短路径问题—— 即已知起点和终点，求两结点之间的最短路径．全局最短路径问题—— 求图中所有的最短路径．

注：有向图：直观来说，若图中的每条边都是有方向的，则叫做有向图．

初中阶段主要涉及确定起点和终点的最短路径问题，即已知起点和终点，求两结点之间的最短路径．

16．将军饮马问题

唐朝诗人李欣的诗《古从军行》开头两句说："白日登山望峰火，黄昏饮马傍交河"．诗中隐含着一个有趣的数学问题．

如图 1 所示，诗中将军在观望烽火之后从山脚下的 A 点出发，走到河旁边的 C 点饮马后再到 B 点宿营．请问怎样走才能使总路程最短？

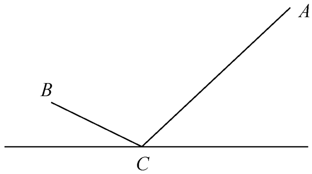


图 1

这个问题早在古罗马时代就有了，传说亚历山大城有一位精通数学和物理的学者，名叫海伦．一天，一位罗马将军专程去拜访他，向他请教一个百思不得其解的问题．这个问题的解决并不难，据说海伦略加思索就解决了它．

解析：如图 2 所示，从 A 出发向河岸引垂线，垂足为 D，在 AD 的延长线上，取 A 关于河岸的对称点 A'，连接 $A'B$，与河岸线相交于 C，则 C 点就是饮马的地方，

将军只要从 A 出发，沿直线走到 C，饮马之后，再由 C 沿直线走到 B，所走的路程就是最短的.

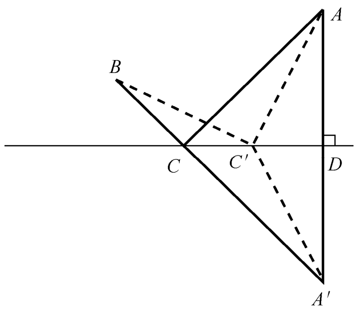


图 2

如果将军在河边的另外任一点 C' 饮马，所走的路程就是 $AC'+C'B$，但是，

$$AC'+C'B=A'C'+C'B>A'B=A'C+CB=AC+CB$$

可见，在 C 点外任何一点 C' 饮马，所走的路程都要远一些.

答：将军只要从 A 出发，沿直线走到 C，饮马之后，再由 C 沿直线走到 B，所走的路程就是最短的.

17. 建桥的思考

A、B 两村位于一条河的两岸．假定河的两岸笔直且平行，如图 1 所示．现在要在河上垂直于河岸建一座桥．问：应把桥建在什么位置，才能使由 A 村经过这座桥到 B 村的路程最短？

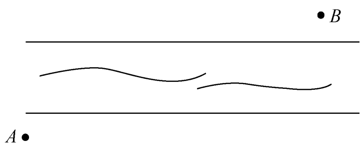


图 1

解析：如图 2 所示，用 CD 表示垂直于河岸所建的桥，则题目要求使 $AC+CD+DB$ 达到最小值.

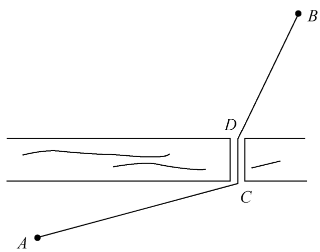


图 2

由于河的两岸笔直且平行，平行线间的距离处处相等，所以，不论桥建在何处，桥的长度 CD 都是固定的．因而，在考虑从 A 村到桥头，过桥，再到 B 村使路程尽可能短的时候，可以先把桥的长度 CD 这段路程扣除，只要设法使 $AC+DB$ 尽量短就行了．因而得到作法如图 3 所示．

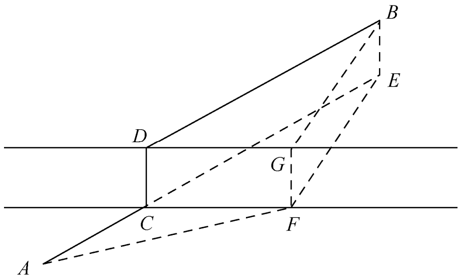


图 3

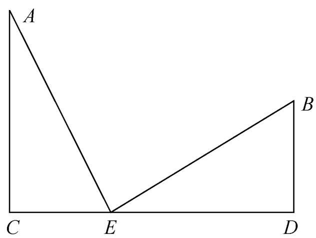
1. 作 $BE\perp$河岸，使 BE 之长等于河宽；
2. 连接 AE，交靠近 A 村的河岸于 C 点；
3. 在 C 点处架桥 CD，从 A 村过此桥到 B 村的路程必最短．

答：在 C 点处架桥 CD，从 A 村过此桥到 B 村的路程必最短．

18. 两鸟叼鱼

小溪边长这两棵棕榈树，恰好隔河相望，一棵树高是 30 肘尺，另外一颗高 20 肘尺，两棵棕榈树的树干距离是 50 肘尺，每棵树的树顶上都停着一只鸟，忽然，两只鸟同时看见棕榈树间的水面上游着一条鱼，它们立刻以相同的速度飞去抓鱼，并且同时到达目标，试求这条鱼出现的地方离高棕榈树的底部有多远？

解析：如下图所示，AC、BD 分别是这两棵棕榈树，$AC=30$，$BD=20$，$CD=50$，两只鸟分别在 A、B 两点．



在 CD 上取点 E，使 $CE=20$，则 $ED=30$．

因为 $AC=ED=30$，$CE=BD=20$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ACE\cong\mathrm{Rt}\triangle EDB$（边角边），得 $AE=BE$

所以这条鱼出现在 E 点，且 $CE=20$，$ED=30$．

答：这条鱼出现的地方离高棕榈树的底部有 20 肘尺.

注：肘尺，肘尺是古代的一种长度测量单位，等于从中指指尖到肘的前臂长度，或约等于 17 至 22 英寸（43 至 56 厘米）.

人体的比例安排如下：四指为一掌，四掌为一足，六掌为一腕尺（cubit）[指前臂的长度，该词来自“肘部”的拉丁文 cubitus，四肘尺合全身].

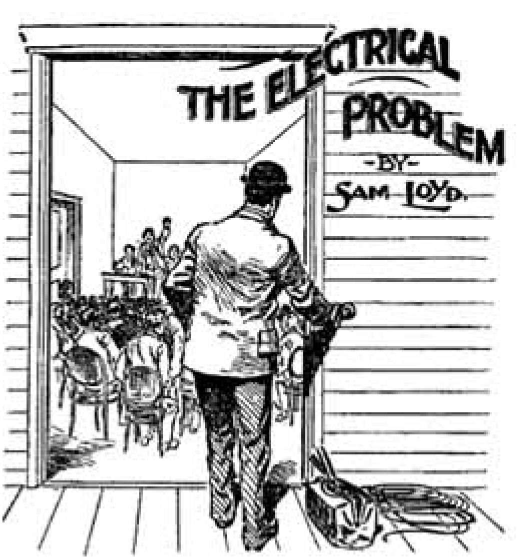
19. 电工问题

最近县里要召开一次政治会议，请一位电工在会议厅后壁安装电铃．它应该连接到前门门框旁边的一只按钮上，以便会务组人员提醒那些冗长的演说家，要他们尽快把话讲完.

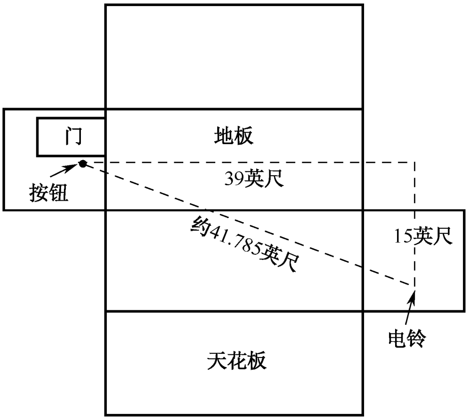
安装此种设备需要多少长的电线，这在工作人员中间引起一番争议，最后这个问题落到了我的头上.

下页图中的会议厅长 30 英尺，宽和高各 12 英尺，电工应从后壁中心线上距天花板 3 英尺处的电铃拉出一条电线，接到前墙中心线上离地板 3 英尺处的门外按钮．可以沿着墙壁、地板和天花板布线.

题目要求算出铺设电线的最短路线，装按钮处的墙壁厚度可以忽略不计.



解析：铺设电线的最短路线是沿着会议厅的前墙、地板、侧壁而到达后壁．如果把这房间看作一只纸板箱，能够把它割开，摊平，展成一个平面图（见下页图），



那么，最短路线就是一个直角三角形的斜边，其直角边分别为 39 英尺和 15 英尺.

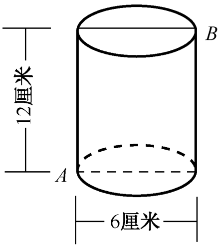
其斜边长:

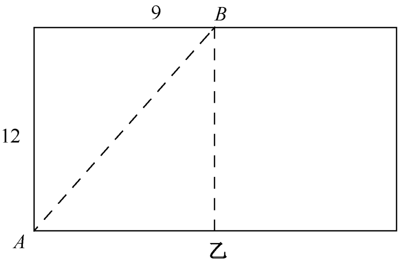
$$\sqrt{39^2+15^2}\approx 41.785\text{（英尺）}$$

答：这条路线的长度比 41.785 英尺稍微长一些.

20. 饥肠辘辘的蚂蚁

如下图所示，有一个圆柱体，它的高等于 12 厘米，底面半径等于 3 厘米，一只饥肠辘辘蚂蚁在点 A 处，它要吃到上底面上与 A 点相对的点 B 处的食物，沿圆柱体侧面爬行的最短路程是多少厘米（π 的值取 3）？





解析：A、B 之间的最短路程为两直角边分别为圆柱的高，底面周长的一半的直角三角形的斜边长.

底面周长的一半为：$3\pi\approx 9$ 厘米，

∴高等于 12 厘米，

∴最短路程为:

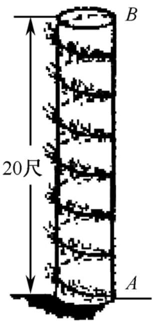
$$\sqrt{9^2+12^2}=15\text{（厘米）}$$

答：沿圆柱体侧面爬行的最短路程是 15 厘米.

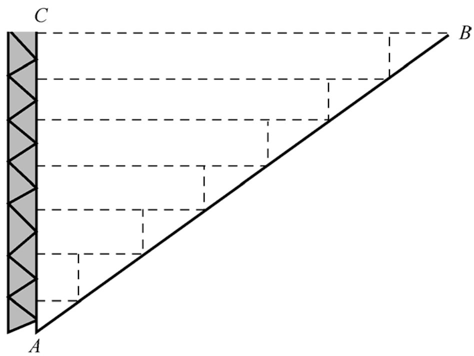
21. 葛卷裹袤

二丈木长三尺围，葛生其下缠绕之，
徐徐缠绕七周遍，葛梢却与木梢齐，
试问先生能算者，葛长多少请君题.

释义：如下图所示，有圆柱形木棍直立地面，高 20 尺，圆柱底面周长 3 尺. 葛藤生于圆柱底部 A 点，等距离缠绕圆柱七周，恰好绕到圆柱上底面的 B 点. 问葛藤的长度是多少尺？



**解析**：这种立体图形求最短路径问题，可以展开成为平面内的问题解决，展开后可转化为下图，所以是个直角三角形求斜边的问题，根据勾股定理可求出.

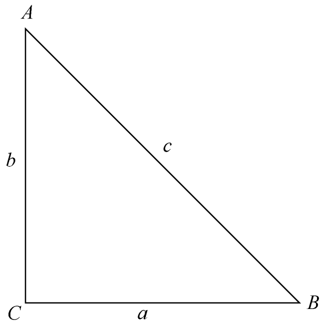


如上图所示，一条直角边（即木棍的高）长 20 尺，
另一条直角边长 $7\times3=21$（尺），
因此葛藤长 $\sqrt{20^2+21^2}=29$（尺）.
答：葛藤长 29 尺.

四、勾 股 定 理

有一个角为 90° 的三角形，叫做直角三角形.

直角三角形如下图所示：



直角三角形性质定理

直角三角形是一种特殊的三角形，它除了具有一般三角形的性质外，具有一些特殊的性质：

性质 1：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方．如下图$\angle BAC=90°$，则$AB^2+AC^2=BC^2$（勾股定理）.

性质 2：在直角三角形中，两个锐角互余．如图，若$\angle BAC=90°$，则$\angle B+\angle C=90°$．

性质 3：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半（即直角三角形的外心位于斜边的中点，外接圆半径 $R=\dfrac{c}{2}$）.

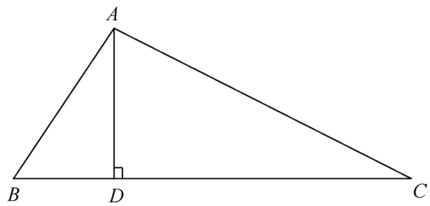
性质 4：直角三角形的两直角边的乘积等于斜边与斜边上高的乘积.

性质 5：如下图，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AD 是斜边 BC 上的高，则有射影定理如下：

（1）$AD^2=BD\cdot DC$.

（2）$AB^2=BD\cdot BC$.

（3）$AC^2=CD\cdot BC$.



射影定理图

性质 6：在直角三角形中，如果有一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半．在直角三角形中，如果有一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的锐角等于 30°．

性质 7：如图，$\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AD^2}$．

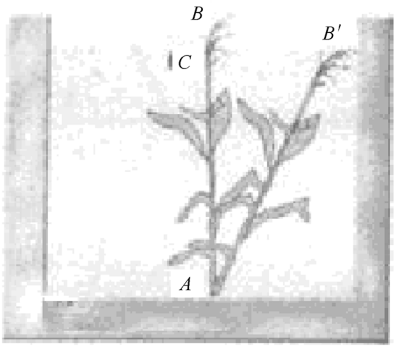
性质 8：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形相似．

22. 引葭赴岸

“引葭赴岸”问题，是我国数学经典著作《九章算术》中的一道名题．《九章算术》约成书于公元一世纪．该书的第九章，即勾股章，详细讨论了用勾股定理解决应用问题的方法．这一章的第 6 题，就是“引葭赴岸”问题，题目是：

“今有池一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，适与岸齐．问水深、葭长各几何？”

释义：有一正方形池塘，边长为一丈（3 丈=10 米）．有一芦苇 AB 生在它的正中央，芦苇高出水面部分 CB 有一尺（3 尺=1 米）长．抓住芦苇尖 B，把芦苇拉向岸边，芦苇尖恰好碰到岸沿 B'．问水深和芦苇长各多少？



**解析**：芦苇高 $AB=x$ 尺，图中 $AB=AB'$，$\because CB=1$ 尺，$\therefore$ 水深 $AC=AB-CB=(x-1)$ 尺，$CB'=\dfrac{1}{2}$（丈）=5（尺）．

如下图所示，在 Rt$\triangle ACB'$中，由勾股定理得:

$$AC^2+CB'^2=AB'^2$$

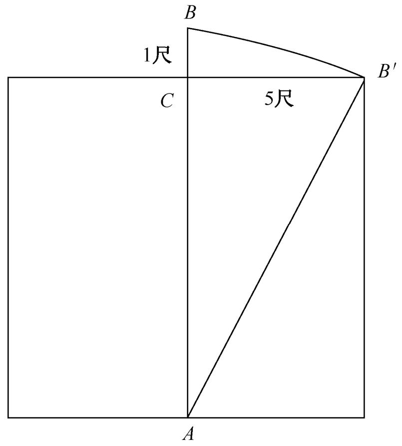
即 $(x-1)^2+5^2=x^2$

整理得:

$2x=26$

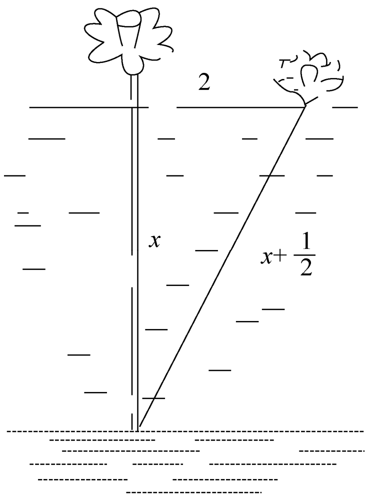
解得：$x=13$

答：芦苇高 1 丈 3 尺，水深 1 丈 2 尺.

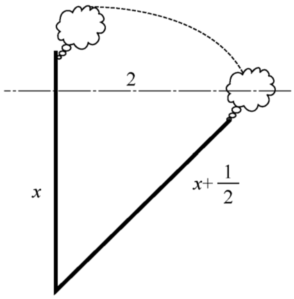


23. 荷花问题

“引葭赴岸”问题的题目还出现在印度的书中，不过把葭换成了荷花．瞧，印度数学家婆什迦罗（1141—1225 年）提出的“荷花问题”（如下图所示）．



平平湖水清可鉴，面上半尺生红莲．
出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边．
渔人观看忙向前，花离原位二尺远．
能算诸君请解题，湖水如何知深浅？



解析：$x^2+2^2=(x+\frac{1}{2})^2$

$x=\frac{15}{4}$（尺）

答：湖水深$\frac{15}{4}$尺.

“荷花问题”的解法与“引葭赴岸”问题一样. 然而，它的出现却比我国的“引葭赴岸”问题晚了一千多年. 这足以证明，举世公认的古典数学名著《九章算术》传入了印度. 《九章算术》中的勾股定理应用方面的内容，涉及范围之广，解法之精巧,都是在世界上遥遥领先的.而在西方最早的数学名著——希腊人欧几里得的《几何原本》中，勾股定理应用方面的内容非常少. 我国古代丰硕的数学成果，为推动世界数学的发展作出了贡献. 中国不愧是数学的故乡！

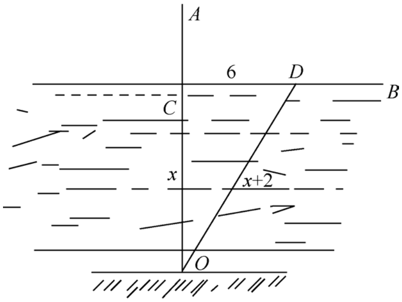
注：印度荷花问题还有另外诗歌题材:

湖静浪平六月天，荷花半尺出水面;
忽来一阵狂风急，湖面之上不复见;
入秋渔翁始发现，残花离根二尺遥.

24. 蒲生池中

今有方池一所，每边丈二无疑.
中心蒲长一根肥，出水过于二尺.
斜引蒲稍至岸，适然与岸方齐.
饶公能算更能推.

释义：今有方形水池一所，每边边长 1.2 丈，中心长出一根香蒲，露出水平面 2 尺，斜引蒲稍至岸边，恰巧抵岸. 尽管先生能推算，请问蒲长、池水深各多少？



解析：如上图所示，设池水深 $OC=x$ 尺．由于 $CD=\dfrac{12}{2}=6$ 尺，$OA=x+2$，则由勾股定理可得：$x^2+6^2=(x+2)^2$

整理得：$4x=32$

解得：水深 $x=8$（尺）

蒲长 8+2=10（尺）．

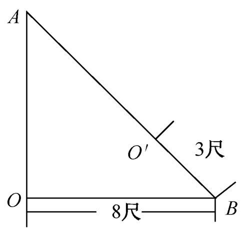
答：水深 8 尺，蒲长 10 尺．

25．索长几何

今有立木，系索其末，委地三尺．引索却行，去本八尺而索尽．问索长几何？

释义：今有立木，系绳索于其末端，堆积地上 3 尺，引绳索后退距根基 8 尺绳索尽，问绳索有多长？

解析：见下图，根据勾股定理



$$AO^2+OB^2=AB^2$$

即 $AO^2+8^2=(AO+3)^2$

$$AO=9\frac{1}{6}$$

$\therefore AB=3+9\dfrac{1}{6}=12\dfrac{1}{6}$（尺）

答：绳索有一丈二尺零六分之一尺长.

26. 笨人持竿

我国当代数学教育家，清华大学教授许莼舫先生将执竿进城的寓言略加改写，用诗歌的形式编成一道趣味的数学题，收入他的《古算趣味》中：

笨人持竿要进屋，无奈门框拦住竹；
横多四尺竖多二，没法急得大声哭；
有个自作聪明者，教他斜竿对两角；
笨伯依言试一试，不多不少刚抵足；
借问竿长多少数，谁人算出我佩服.

解析：设竿长为 x 尺，则门宽 $x–4$ 尺，门高 $x–2$ 尺，根据勾股定理，得:

$(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$．展开、移项、合并同类项得:

$x^2-12x+20=0$．

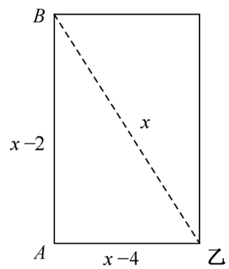
左边分解因式，得:

$(x-2)(x-10)=0$．

$\therefore x=2$（舍去）或 $x=10$.

$\therefore$竹竿的长为 10 尺.

答：竹竿的长为 10 尺.

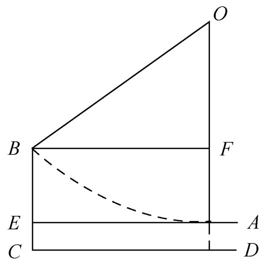


27. 荡秋千——西江月

平地秋千未起，踏板一尺离地，
送行二步与人齐，五尺人高曾记；
仕女佳人争蹴，终朝笑语欢嬉.
良工高士素好奇，算出索长有几？
（选自《直指算法统宗》）

释义：当秋千静止在地上时，秋千的踏板离地的距离为一尺，将秋千的踏板往前推两步（这里是每一步合五尺），秋千的踏板与人一样高，这个人的身高为五尺，当然这个秋千的绳索是呈直线状态，现在问这个秋千的绳索有多长？

解析：如图所示，不妨设图中的 OA 为秋千的绳索，CD 为地平面，BC 为身高 5 尺的人，AE 为两步，相当于 10 尺的距离，A 处有一块踏板，EC 为踏板离地的距离，它等于一尺.



设 $OA=x$，即 $OB=OA=x$，$FA=BE=BC-EC=5-1=4$ 尺，$BF=EA=10$ 尺.

在 Rt△OBF 中，由勾股定理，

得 $OB^2=OF^2+BF^2$，即 $x^2=(x-4)^2+10^2$，

解这个方程，得 $x=14.5$（尺）

答：这个秋千的绳索长度为 14.5 尺.

注：与程大位解法完全一致.《直指算法统宗》当时风行海内外，研究算学的人无不家藏一册. 时至今日，对数学史学者来说，这部书仍是他们重要的研究对象.

28. 枯梢折竹——西江月

今有竹高一丈，圆中出众高强.

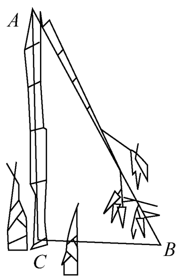
只因有病被虫伤，节节相连不长.

风折枯枝在地，离根三尺曾量.

枯梢折竹数明彰，激恼先生一晌.

（选自《直指算法统宗》）

释义：有一根竹子高一丈，竹梢部分折断，尖端落在地上，竹尖与竹根的距离三尺，问竹竿还有多高？



解析：由勾股定理得：

$AC^2+BC^2=AB^2$

$\because BC=3$，$AB=10-AC$

$\therefore AC^2+3^2=(10-AC)^2$

解得：$AC=4.55$（尺）

答：原处还有 4.55 尺高的竹子.

29. 门斤高广——西江月

今有门厅一座，不知门广高低.

长竿横握使归室，无奈门狭四尺.

随即竖竿过去，亦长二尺无疑.

两隅斜去恰方齐，请问三色各几.

（选自《直指算法统宗》）

释义：现在有一座门，不知道宽度和高度，如果拿个长竹竿横着过，可惜门窄了四尺，然后把竹竿竖着过，竹竿也长二尺，沿对角线斜着呢，恰好过去，问门高度、宽度、竹竿长度各多少？

解析：设门宽 x，则竹竿长 $x+4$，门高 $x+2$

由勾股定理

$$x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$$

解得：$x=6$（尺）

即门宽 6 尺，高 8 尺，竹竿长 10 尺.

答：门宽 6 尺，高 8 尺，竹竿长 10 尺.

30. 古柱索长——西江月

田中有一古柱，丈六全没枝梢.

尖头一马系难牢，吃尽田中禾稻.

四分五厘田地，团团吃一周遭.

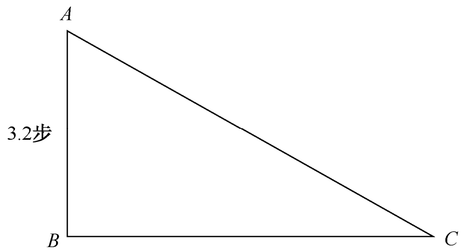
索长几许算偿招，不算难赔多少.

（选自《直指算法统宗》）

释义：田中有一根木柱，柱高 1 丈 6 尺，柱的尖头用一根绳系一匹马（系难牢），吃尽田中禾稻. 禾稻四分五厘田地，问索长多少？

一亩=240 平方步，1 步=5 尺，$\pi=3$.

解析：见下页图



四分五厘田地相当于:

0.45×240=108（平方步）

依据圆面积公式:

$$BC=\sqrt{\frac{0.45\times240}{3}}=6\text{（步）}$$

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}\times5=\sqrt{3.2^2+6^2}\times5=6.8\times5=34\text{（尺）}$$

答：索长 34 尺.

31．“总统”证法

学过几何的人都知道勾股定理．它是几何中一个比较重要的定理，应用十分广泛．迄今为止，关于勾股定理的证明方法已有 500 余种．其中，美国第二十任总统加菲尔德的证法在数学史上被传为佳话．

总统为什么会想到去证明勾股定理呢？难道他是数学家或数学爱好者？答案是否定的．事情的经过是这样的：

在 1876 年一个周末的傍晚，在美国首都华盛顿的郊外，有一位中年人正在一边散步，一边欣赏黄昏的美景，他就是当时美国俄亥俄州共和党议员加菲尔德．他走着走着，突然发现附近的一个小石凳上，有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么，时而大声争论，时而小声探讨．好奇心驱使加菲尔德循声向两个小孩走去，想搞清楚两个小孩到底在干什么．只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形．于是加菲尔德便问他们在干什么？只见那个小男孩头也不抬地说：“请问先生，如果直角三角形的两条直角边分别为 3 和 4，那么斜边长为多少呢？”加菲尔德答到：“是 5 呀．”小男孩又问道：“如果两条直角边分别为 5 和 7，那么这个直角三角形的斜边长又是多少？”加菲尔德不加思索地回答到：“那斜边的平方一定等于 5 的平方加上 7 的平方．”小男孩又说道：“先生，你能说出其中的道理吗？”加菲尔德一时语塞，无法解释了，心里很不是滋味．

于是加菲尔德不再散步，立即回家，潜心探讨小男孩给他留下的难题．他经过反复地思考与演算，终于弄清楚了其中的道理，并给出了简捷的证明方法．

解析：如下图所示：

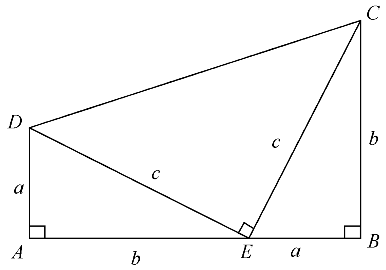
$$\because S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)^2 =\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2) \qquad (1)$$

又

$$\because S_{梯形ABCD}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle EBC}+S_{\triangle CED} =\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(2ab+c^2) \qquad (2)$$

比较式（1）和式（2）便得：

$$c^2=a^2+b^2$$



1876 年 4 月 1 日，加菲尔德在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的这一证法.

1881 年，加菲尔德就任美国第二十任总统. 后来，人们为了纪念他对勾股定理直观、简捷、易懂、明了的证明，就把这一证法称为“总统”证法.

五、四边形趣题

平行四边形的性质：

（1）平行四边形对边相等；

（2）平行四边形对边平行；

（3）平行四边形对角相等；

（4）平行四边形对角线互相平分；

（5）平行四边形邻角互补.

平行四边形的判定方法：

（1）两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

（2）一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

（3）两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

（4）对角线互相平分的四边形是平行四边形；

（5）两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

（6）所有邻角都互补的四边形是平行四边形.

矩形的性质：

矩形是特殊的平行四边形，矩形具有平行四边形的所有性质，从而矩形的性质可归结为以下三个方面来看：

（1）从边看，矩形对边平行且相等.

（2）从角看，矩形四个角都是直角.

（3）从对角线看，矩形对角线互相平分且相等.

矩形是轴对称图形，它有两条对称轴，它也是中心对称图形，对称中心是对角线的交点.

矩形的判定方法：

（1）有一个角是直角的平行四边形是矩形；

（2）对角线相等的平行四边形是矩形；

（3）有三个角是直角的四边形是矩形.

菱形的性质：

拥有平行四边形的一切性质，另四条边都相等；

两条对角线互相垂直平分.

菱形的判定方法：

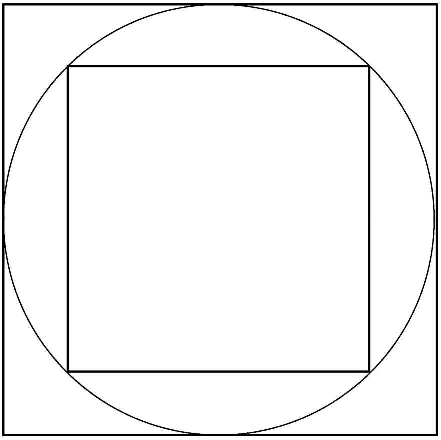
（1）有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

（2）对角线相互垂直的平行四边形是菱形.

（3）四条边都相等的四边形是菱形.

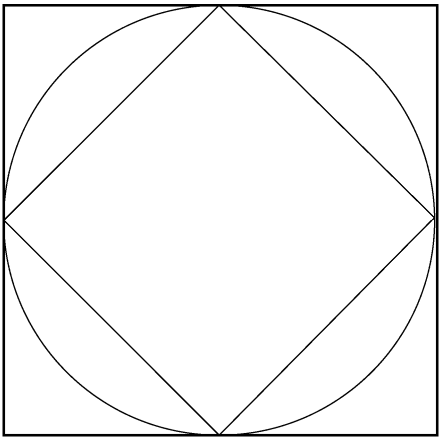
32. 巧算面积比

如下图所示，这个几何图形是由一个正方形内接于一个圆内，而这个圆又内切于一个正方形所构成．请问这个几何图形中的小正方形与大正方形的面积比是多少？



这是一道看似简单却又容易迷惑许多人的几何趣题，在你完成对于这个题目的解答，并由我公布答案之后，你会发现，这个几何题目的解决方法竟然如此简单，甚至低估了你的智商，你会因此而感到不可思议，为之惊叹．

解析：旋转一下即知，小正方形与大正方形的面积比是 1∶2.



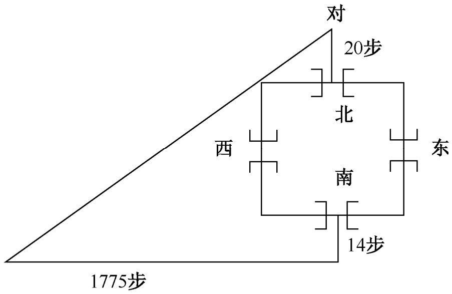
答：这个几何图形中的小正方形与大正方形的面积比是 1∶2.

33. 城墙的长度

有一座城，城墙有东西南北四面，呈正方形，在每边城墙的中间开了城门，出北门走 20 步栽了一棵树．另外，出南门向前走 14 步，再向西走 1775 步就能看到那棵树．

请问这座城的城墙每边有多长？

解析：设每边城墙为 $2x$，如下图所示，有以下比例关系：



$$\frac{20}{x}=\frac{2x+34}{1775}$$

即 $x^2+17x-17\,750=0$

解得：$2x=-17\pm\sqrt{17^2+4\times 17\,750}=-17\pm 267$

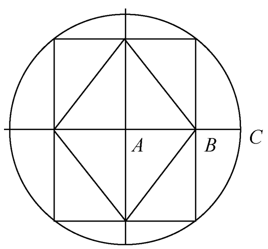
因为 x 必须大于 0，

所以，$2x=250$（步）

答：城墙每边长 250 步．

34. 隐蔽的尺寸

某城市广场中有一块圆形憩息地，市政府拟在此区域内修建一个菱形花坛（如下图所示）；花坛中心 A 与憩息地圆心重合，A 到菱形的顶点 B 的距离为 5 米，B 到圆周上 C 点的距离为 4 米，则花坛的边长是多少？



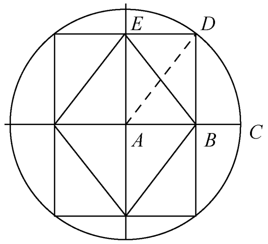
解析：如下图所示，连接 AD.

A 为菱形的圆心，易证得四边形 $ABDE$ 为矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形），$\therefore BE=AD$

$\because AD=AC=AB+BC=9$（米），

$\therefore BE=AD=9$（米）

即菱形的边长为 9（米）.

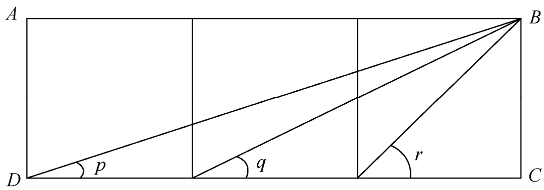


答：花坛的边长是 9（米）.

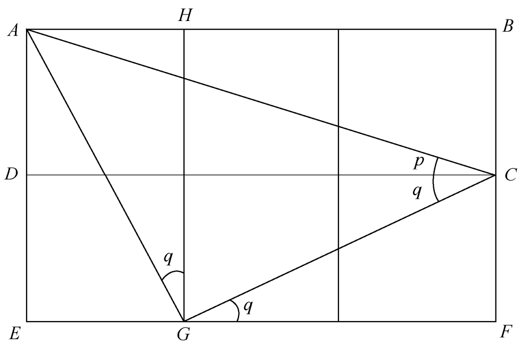
注：隐蔽的尺寸：花坛的边长既是对角线又是半径.

35. 三角关系

如下图所示，在并排的三个正方形内画三个三角形，这时，$\angle p$、$\angle q$、$\angle r$ 之间会成什么关系？



解析：和 DC 对称排列三个正方形，连接 AC、AG，见下图：



不难看出：$\angle ACD=\angle p$，$\angle AGH=\angle CGF=\angle q$，

$\therefore \angle AGC=90°$

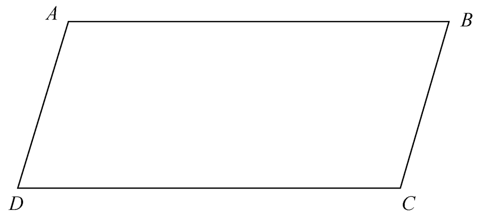
并且，$AG=GC$，$\therefore \angle p+\angle q=45°$，而$\angle r=45°$

所以，$\angle p+\angle q+\angle r=90°$

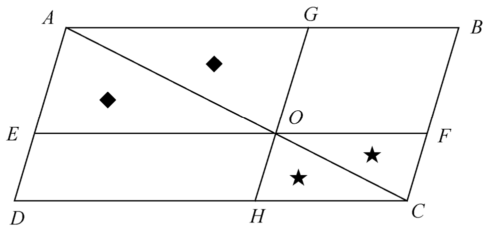
答：$\angle p$、$\angle q$、$\angle r$之和为$90°$．

36．老财主的遗嘱

从前，有一位财主病重，立了一份遗嘱：他死后，把他的地产：一块平行四边形地块（如下图所示）分给四个孩子，要求每人分到的地块都是平行四边形，并且老二、老三分到的地块面积一样多，后人该怎样分这块地呢？



解析：在平行四边形$ABCD$中，连接AC，划线$GH\parallel BC$，$EF\parallel DC$，AC、GH、EF交于O.



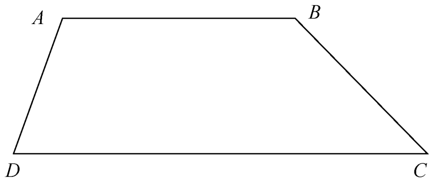
上图中有◆的部分彼此面积相等，有★的部分也彼此面积相等．此外，$\triangle ABC$和$\triangle CDA$面积也相等．从相等的面积中减去相等面积后的平行四边形$EOHD$和平行四边形$GOFB$当然面积也相等，即可得解.

37．梯形领地

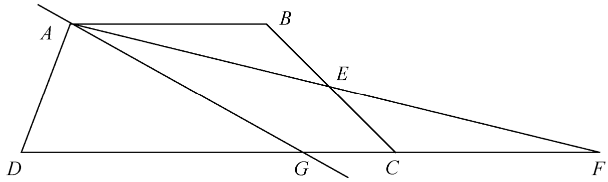
在自然界，几乎所有的动物都有领地意识．领地是动物占据的空间范围，是动物生存的物质基础，动物都在自己的领地里觅食、栖息、繁衍．具有领地意识的动

物个体或动物群体都占有一定的地盘，动物都会在相对固定的时间间隔在其领地范围进行巡视，并在植物上、土地上留下自己独有的气味、粪便、尿液等进行领地的边缘的区分.

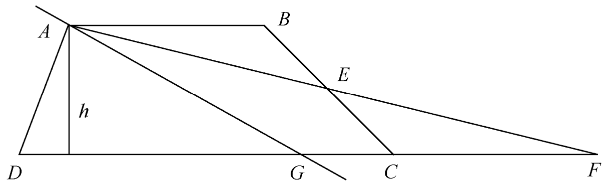
一野生动物园地块是梯形（如下图所示），两个狮群经过打斗，它们用一条直线为分界线把这块梯形空地分成面积相等的两块，最终达到和解. 这该怎么做呢？



解析：（1）延长 DC 使 $CF=AB$；（2）连接 AF；（3）取 DF 中点 G，连接 AG，则 AG 为所求.



证明：见下图



$$S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\times DG\times h=\frac{1}{2}\times GF\times h=\frac{1}{2}\times(GC+CF)\times h=\frac{1}{2}\times(GC+AB)\times h=S_{\text{四边形}ABCG}$$

六、一 次 函 数

函数的基本概念：在某一个变化过程中，设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的每一个确定的值，在 y 中都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 y 是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量.

定义了函数的概念，接下来我们来介绍函数的一种特殊情况—— 一次函数．表达式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$，k、b 均为常数）的函数，称 y 是 x 的一次函数．当 $b=0$ 时称 y 为 x 的正比例函数，正比例函数是一次函数中的特殊情况．当常数项为零时的一次函数，可表示为 $y=kx$（$k\neq 0$)，这时的常数 k 又称比例系数（也称正比例函数）.

y 关于自变量 x 的一次函数有如下关系：

$y=kx+b$（k 为任意不为 0 的常数，b 为任意实数）

当 x 取一个值时，y 有且只有一个值与 x 对应．如果有 2 个及以上个值与 x 对应时，就不是一次函数.

x 为自变量，y 为函数值，k 为常数，y 是 x 的一次函数.

特别的，当 $b=0$ 时，y 是 x 的正比例函数．即：$y=kx$（k 为常量，但 $k\neq 0$）正比例函数图像经过原点.

定义域：自变量 x 的取值范围．自变量的取值一要使函数有意义；二要与实际相符合.

常用的表示方法：解析法、图像法、列表法.

38．柳卡趣题

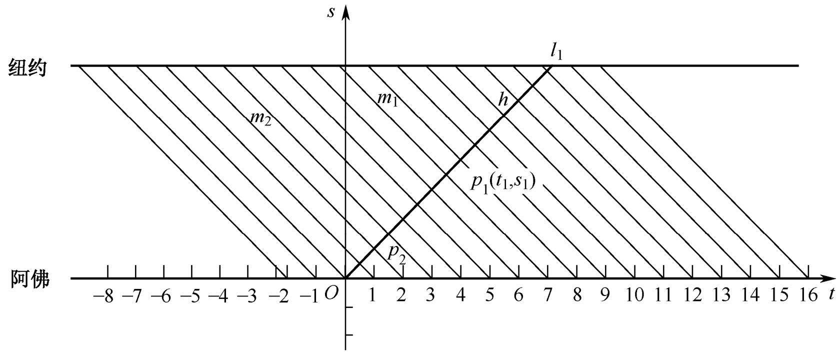
19 世纪法国数学家柳卡在一次国际数学会议上提出了一道有趣的题目：

每天中午，某航运公司有一艘轮船从巴黎的外港——塞纳河口的勒阿佛尔开往纽约．在每天的同一时间也有该公司的一艘轮船从纽约开往勒阿佛尔．轮船在横渡大西洋途中所花的时间正好是七天七夜，并且假设在全部航程中轮船都是匀速行驶的，轮船在大西洋上按照一定航线航行，在近距离内彼此可以看得到．那么，当今天中午从勒阿佛尔开出去的船 A 到达纽约时，将会遇到多少艘同一公司的轮船从对面开来？

你能帮柳卡解决这一趣题吗？

解析：以时间 t（天）为自变量，以轮船与勒阿佛尔港问的距离 s 为因变量，

显然，船 A 及从纽约出发的各船的 s 均是 t 的一次函数.



在同一直角坐标系内分别作出它们的图像（如上图所示），其中 l_1 为船 A 相应的函数图像，船 A 从勒阿佛尔出发的同时、从纽约出发的船相应的函数图像为 m_1，m_2 为比船 A 早 5 天从纽约出发的船相应的函数图像. l_1 与 m_1 交于 $p_1(t_1,s_1)$，表示船 A 与从纽约同时出发的船在 t_1 天后相遇. 图中与 l_1 相交的共有 15 条线，故该船将遇到同一公司的 15 艘船.

答：从勒阿佛尔开出去的船 A 到达纽约时，将会遇到 15 艘同一公司的轮船从对面开来.

39. 大吉大利之年

今年对贝利来说是个大吉大利之年，村上的格拉斯老人就是这么说的. 格拉斯老人常为人看个相算个命什么的，虽然有时没有准头，但有时是蛮灵的. 他说贝利将交好运，理由很简单，那是因为贝利今年的年龄刚好是他出生年份的四位数之和. 要知道，这样的事情不是年年都有的.

贝利今年（2002）几岁了？

注：不同的（今年）有不同的答数，而且有些“今年”没有答案.

解析：贝利的年龄随“今年”的不同而有着不同的答案. 依题意，如果今年是 2002 年，则设贝利的出生年 $1900+10x+y$ 年，x、y 均是 0 ~ 9 之间的正整数，于是有 $2002-(1900+10x+y)=1+9+x+y$，整理得：

$$y=-\frac{11}{2}x+46$$

$\because$ x、y 不但是正整数，而且是 0 ~ 9 中的整数，

$\therefore y=-\frac{11}{2}x+46\leqslant 9$

解此不等式:

$x \geqslant 6\dfrac{8}{11}$，但 x 是小于 9 的且偶数，故 $x=8$，从而 $y=2$

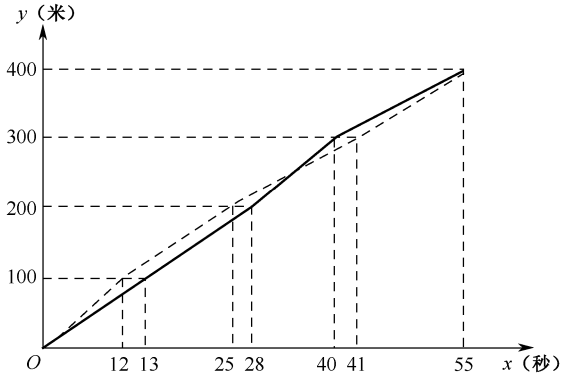
答：贝利是 1982 年出生的，他 2002 年 20 岁.

40. 400 米接力赛

4×100 米接力赛是学校运动会最精彩的项目之一. 下图中的实线和虚线分别是初三•一班和初三•二班代表队在比赛时运动员所跑的路程 y（米）与所用时间 x（秒）的函数图像（假设每名运动员跑步速度不变，交接棒时间忽略不计）.

问题：（1）初三•二班跑得最快的是第几接力棒的运动员；

（2）发令后经过多长时间两班运动员第一次并列？



解析：（1）从上面函数图像上可看出初三•二班跑得最快的是第 1 接力棒的运动员，他用 12 秒跑完 100 米;

（2）在图像相交的部分，设一班的直线为 $y_1=kx+b$，把点（28，200），（40，300）代入得:

$28k+b=200$

$40k+b=300$

解得：$k=\dfrac{25}{3}$，$b=-\dfrac{100}{3}$

即 $y_1=\dfrac{25}{3}x-\dfrac{100}{3}$，

设二班的直线为 $y_2=k'x+b'$，把点（25，200），（41，300），代入得:

$25k+b=200$

$41k+b=300$

解得：$k'=\dfrac{25}{4}$，$b'=\dfrac{175}{4}$，

即 $y_2=\dfrac{25}{4}x+\dfrac{175}{4}$

联立方程组：

$$\begin{cases} y=\dfrac{25}{3}x-\dfrac{100}{3} \\ y=\dfrac{25}{4}x+\dfrac{175}{4} \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x=37\text{（秒）} \\ y=275\text{（米）} \end{cases}$

所以发令后第 37 秒两班运动员在 275 米处第一次并列.

答：初三•二班跑得最快的是第 1 接力棒的运动员，发令后第 37 秒两班运动员在 275 米处第一次并列.

41. 科普读物

科普读物就是与科学技术普及有关的书籍．五洲出版社出版一种适合中学生阅读的科普读物，若该读物首次出版印刷的印数不少于 5000 册时投入的成本与印数间的相应数据如下：

印数 x（册）	5000	8000	10 000	15 000	……
成本 y（元）	28 500	36 000	41 000	53 500	……

（1）经过对上表中数据的探究，发现这种读物的投入 y（元）是印数 x（册）的一次函数，求这个一次函数的解析式（不要求写出的 x 取值范围）.

（2）如果出版社投入成本 48 000 元，那么能印该读物多少册？

解析：（1）设所求一次函数的解析式为 $y=kx+b$，则

$$\begin{cases} 5000k+b=28\,500 \\ 8000k+b=36\,000 \end{cases}$$

解得：$k=\dfrac{5}{2}$，$b=16\,000$。

$\therefore$ 所求函数的关系式为 $y=\dfrac{5}{2}x+16\,000$.

（2）$\because 48\,000=\dfrac{5}{2}x+16\,000$，$\therefore x=12\,800$（册）.

答：如果出版社投入成本 48 000 元，那么能印该读物 12 800 册.

42. 一个弹簧

弹簧是一种利用弹性来工作的机械零件．一个弹簧，不挂物体时长 12 厘米，挂上物体后会伸长，伸长的长度与所挂物体的质量成正比例．如果挂上 3 千克物体后，则弹簧总长是 13.5 厘米，求弹簧总长是 y（厘米）与所挂物体质量 x（千克）之间的函数关系式．如果弹簧最大总长为 23 厘米，求自变量 x 的取值范围？

解析：此题由物理的定性问题转化为数学的定量问题，同时也是实际问题，其核心是弹簧的总长是空载长度与负载后伸长的长度之和，而自变量的取值范围则可由最大总长→最大伸长→最大质量及实际的思路来处理.

由题意设所求函数为 $y=kx+12$，

则 $13.5=3k+12$，得 $k=0.5$，

∴所求函数解析式为 $y=0.5x+12$，

由 $23=0.5x+12$ 得：$x=22$ ，

∴自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 22$.

答：x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 22$.

43. 成本与销售量

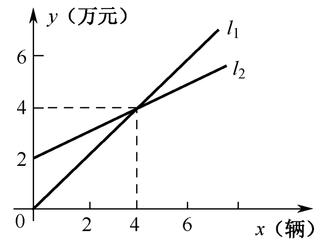
如下图所示，l_1 表示神风摩托厂一天的销售收入与摩托车销售量之间的关系；l_2 表示摩托厂一天的销售成本与销售量之间的关系．

（1）写出销售收入与销售量之间的函数关系式；

（2）计算销售成本与销售量之间的函数关系式；

（3）当一天的销售量为多少辆时，销售收入等于销售成本；

（4）一天的销售量超过多少辆时，工厂才能获利？



解析：由上图可知 l_1 与 x 成正比例关系，l_2 是 x 的一次函数．再由 l_1 经过（4，4），l_2 经过（0，2），（4，4），可求得两函数的解析式.

所以，（1）$y=x$.

（2）设 $y=kx+b$，

∵直线过（0，2）、（4，4）两点，

∴$y=kx+2$，又 $4=4k+2$，

∴$k=\frac{1}{2}$，∴$y=\frac{1}{2}x+2$.

（3）由图像知，当 $x=4$ 时，销售收入等于销售成本.

（4）由图像知，当 $x>4$ 时，工厂才能获利.

答：销售收入与销售量之间的函数关系式为 $y=x$，销售成本与销售量之间的函数关系式为 $y=\frac{1}{2}x+2$；当 $x=4$ 时，销售收入等于销售成本；当 $x>4$ 时，工厂才能获利.

44. 小狗与老鼠

一位来自广东的小商人买进一些胖墩墩的小狗，还买了成对的老鼠，老鼠的对数正好是小狗头数的一半. 每只小狗进价为 2 只角子，每对老鼠也是这个价钱.

后来，小商人将这些动物以高出进价 10% 的价钱卖了出去，自己身边只留 7 只. 这时，他发现所得的钱款与买进全部动物所花的钱正好相等. 因此他的利润正好由那留下的 7 只动物的零售价所代表.

问：这 7 只动物究竟是什么？它们值多少钱？

解析：设 x 是原先买进的小狗数，也就是购入的老鼠数. 我们用 y 表示留下来的 7 只动物中的小狗数，则留下来的老鼠数应为 $7-y$，卖掉的小狗数（每只卖价按增加 10% 计算，应是 2.2 只角子）等于 $x-y$，而卖掉的老鼠数（每对卖 2.2 只角子，或每只卖 1.1 只角子）是 $x-(7-y)$.

把上述数据表示为方程的形式并加以化简，即可得下列关于两个未知数的方程，当然这些未知数都应是正整数：$3x=11y+77$.

此外，已知 y 不能大于 7.

把 7 个可能的 y 值一一代进去……，我们发现只有当 $y=5$ 和 2 时，x 才是正整数. 如果不是事先已说明老鼠是成对买进的话，将会出现两个不同的解. 若 $y=2$，则原先购入的老鼠数为 33 只，而 33 是奇数，不合题意，必须排除，从而得出：$y=5$. 现在真相已经大白，商人买进 44 只小狗和 22 对老鼠，总共付出 132 只角子. 他卖掉了 39 只小狗与 21 对老鼠，收入 132 只角子，身边还剩下 5 只小狗，价值为 11 只角子（零售价），和 2 只老鼠，值 2.2 只角子（也是零售价）. 这 7 只动物一共值 13.2 只角子，

正好等于他原来投资额的 10%.

答：这 7 只动物是 5 狗 2 鼠，一共值 13.2 只角子.

注：角子指零钱.

45. 稀薄的高山空气

科学研究发现，空气含氧量 y（克/立方米）与海拔高度 x（米）之间近似地满足一次函数关系．经测量，在海拔高度为 0 米的地方，空气含氧量约为 299 克/立方米；在海拔高度为 2000 米的地方，空气含氧量约为 235 克/立方米.

（1）求出 y 与 x 的函数关系式；

（2）已知某山的海拔高度为 1200 米，请你求出该山山顶处的空气含氧量约为多少？

解析：（1）设 $y=kx+b$，则有：

$$\begin{cases} b = 299 & (1) \\ 2000k + b = 235 & (2) \end{cases}$$

将式（1）代入式（2），

解之得 $k=-\dfrac{4}{125}$，

$\therefore y=-\dfrac{4}{125}x+299$；

（2）当 $x=1200$ 时，$y=-\dfrac{4}{125}\times 1200+299=260.6$（克/立方米）.

答：该山山顶处的空气含氧量约为 260.6 克/立方米.

点评：此题主要考查了待定系数法求一次函数解析式以及一次函数的应用，正确求出一次函数解析式是解题关键.

七、一元二次不等式和二元一次不等式组

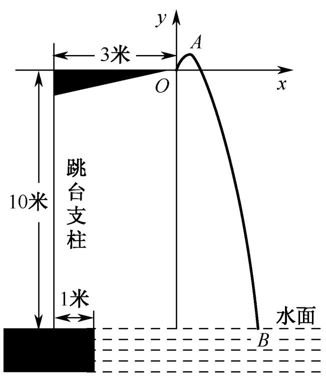
由几个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的不等式组，叫做一元一次不等式组．不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫做这个不等式组的解集．求不等式组的解集的过程叫做解不等式组．

46．跳水趣题

跳水比赛，尤其吸引多哈妇女儿童前往观看．一有跳水比赛，跳水比赛场馆里总能涌进千把来人．他们吃着零食，喝着饮料，兴致盎然地观看跳水比赛．他们认为，跳水相当好玩：选手们从 10 米高的跳台上纵身跳下，还在空中做着各种舒展而花哨的动作，最后入水还不溅起太多的水花，真的很奇妙．某跳水运动员进行 10 米跳台跳水训练时，身体（看成一点）在空中的运动路线是如图所示坐标系下经过原点 O 的一条抛物线（下图中标出的数据为已知条件）．在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面$10\dfrac{2}{3}$米，入水处距池边的距离为 4 米，运动员在距水面高度为 5 米以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误．

（1）求这条抛物线的解析式；

（2）在某次试跳中，测得运动员在空中的运动路线是（1）中的抛物线，且运动员在空中调整好入水姿势时，距池边的水平距离为$3\dfrac{3}{5}$米，问此次跳水会不会失误？并通过计算说明理由．



解析：（1）在给定的直角坐标系下，设最高点为 A，入水点为 B，如上图所示，抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由题意，知 O（0，0），B（2，−10），且顶点 A 的纵坐标为 $\frac{2}{3}$. 所以，

$$\begin{cases} c=0 \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{2}{3} \\ 4a+2b=0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} a=-\dfrac{25}{6} \\ b=\dfrac{10}{3} \\ c=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$

∵抛物线对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\frac{b}{2a}>0$，

又∵抛物线开口向下，∴ $a<0$，$b>0$

∴ $a=-\frac{25}{6}$，$b=\frac{10}{3}$，$c=0$

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$

（2）当运动员在空中距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ 米时，

即 $x=3\frac{3}{5}-2=1\frac{3}{5}$ 时，$y=\left(-\frac{25}{6}\right)\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$

∴此时运动员距水面的高为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$，因此，此次跳水会失误.

答：抛物线的解析式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$；此次跳水会出现失误.

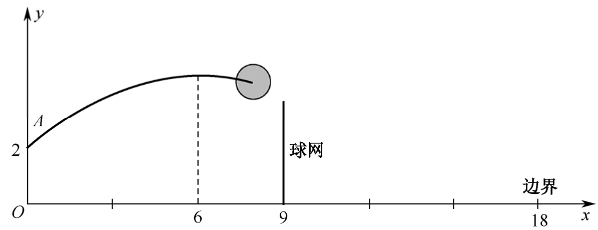
47. 排球运动员的思考

如下图所示，排球运动员站在点 O 处练习发球，将球从 O 点正上方 2（米）的 A 处发出，把球看成点，其运行的高度 y（米）与运行的水平距离 x（米）满足关系式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与 O 点的水平距离为 9（米），高度为 2.43（米），球场的边界距 O 点的水平距离为 18（米）.

（1）当 h=2.6 时，求 y 与 x 的关系式（不要求写出自变量 x 的取值范围）；

（2）当 h=2.6 时，球能否越过球网？球会不会出界？请说明理由；

（3）若球一定能越过球网，又不出边界，求 h 的取值范围.



**解析**：（1）把 $x=0$，$y=2$ 及 $h=2.6$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$，得：$2=a(0-6)^2+2.6$，解得：$a=-\dfrac{1}{60}$，所以，y 与 x 的的关系式是：$y=-\dfrac{1}{60}(x-6)^2+2.6$；

（2）当 $x=9$ 时，$y=-\dfrac{1}{60}(9-6)^2+2.6=2.45>2.43$，所以球能过网，当 $x=18$ 时，$-\dfrac{1}{60}(18-6)^2+2.6=0.2$，所以球会出界；

（3）将 $x=0$，$y=2$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$，得 $2=a(0-6)^2+h$，解得 $a=\dfrac{2-h}{36}$，

当 $x=9$ 时，$y=\dfrac{2-h}{36}(9-6)^2+h=\dfrac{2+3h}{4}=\dfrac{2+3\times2.6}{4}=2.45>2.43$　　（1）

当 $x=18$ 时，$y=\dfrac{2-h}{36}(18-6)^2+h=8-3h=8-3\times2.6=0.2>0$　　（2）

由式（1）和式（2）得 $h\geqslant\dfrac{8}{3}$.

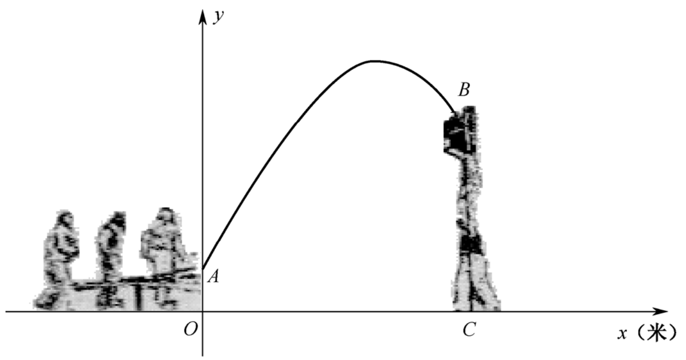
答：（1）当 h=2.6 时，求 y 与 x 的关系式 $y=-\dfrac{1}{60}(x-6)^2+2.6$；

（2）当 h=2.6 时，球能否越过球网，球会出界；

（3）若球一定能越过球网，又不出边界，求 h 的取值范围 $h\geqslant\dfrac{8}{3}$.

48. 玩跷跷板的技巧

杂技团举行杂技表演，演员从跷跷板右端 A 处弹跳到人梯顶端 B 处，其身体（看成一点）的路线是二次函数 $y=-\dfrac{3}{5}x^2+3x+1$ 图像的一部分，如下图所示.



（1）求演员弹跳离地面的最大高度；

（2）已知人梯高 $BC=3.4$ 米，在一次表演中，人梯到起跳点 A 的水平距离是 4 米，问这次表演是否成功？并说明理由.

解析：（1）$y=-\frac{3}{5}x^2+3x+1=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$

$\because -\frac{3}{5}<0$，$\therefore$ 函数的最大值是 $\frac{19}{4}$；

（2）当 $x=4$ 时，$y=-\frac{3}{5}\times 4^2+3\times 4+1=3.4=BC$，所以这次表演成功.

答：演员弹跳的最大高度是 $\frac{19}{4}$ 米，这次表演能够成功.

49. 国际足球比赛的场地

某大型体育馆里，一个长方形足球场里的长为 x 米，宽为 70 米，如果它的周长大于 350 米，面积小于 7560 平方米，求 x 取值范围，并判断是否可以用作国际足球比赛？

注：用于国际比赛的足球场的长在 100 ~ 110 米之间，宽在 64 ~ 75 米之间.

解析：足球场周长大于 350 米，即

$$2(x+70)>350 \qquad (1)$$

面积小于 7560，即

$$70x<7560 \qquad (2)$$

由式（1）解得:

$$x>105$$

由式（2）解得:

$$x<108$$

所以 x 的取值范围是:

$$105 < x < 108$$

因为国际足球比赛的足球场长为 100～110 米，所以可以用作国际足球比赛.

答：该长方形足球场可以用作国际足球比赛.

50. 容器里的水

在容器里有 18℃的水 6 立方米，现在要把 8 立方米的水注入容器里面，使容器里混合的水的温度不低于 30℃，且不高于 36℃，求注入的 8 立方米的水的温度应该在什么范围？

解析：设水温为 x℃，依题意:

$$30 \leqslant \frac{18 \times 6 + 8x}{6 + 8} \leqslant 36$$

化简得:

$$30 \leqslant \frac{54 + 4x}{7} \leqslant 36$$

得不等式组:

$$\begin{cases} 54 + 4x \geqslant 210 & (1) \\ 54 + 4x \leqslant 252 & (2) \end{cases}$$

由式（1）得:

$$x \geqslant 39$$

由式（2）得:

$$x \leqslant 49.5$$

所以，$39 \leqslant x \leqslant 49.5$

答：水温的取值范围是 39～49.5℃.

八、分 式 方 程

分式方程是方程中的一种，且分母里含有未知数的（有理）方程叫做分式方程（fractional equation）. 例如 $\frac{x}{100}=\frac{95}{x}+0.35$.

分式方程的解法：

① 去分母

方程两边同时乘以最简公分母（最简公分母：①系数取最小公倍数，②出现的字母取最高次幂，③出现的因式取最高次幂），将分式方程化为整式方程；若遇到互为相反数时，不要忘了改变符号.

② 按解整式方程的步骤：

移项，若有括号应去括号，注意变号，合并同类项，把系数化为 1 并求出未知数的值.

③ 验根：

求出未知数的值后必须验根，因为在把分式方程化为整式方程的过程中，扩大了未知数的取值范围，可能产生增根. 验根时把整式方程的根代入最简公分母，如果最简公分母等于 0，这个根就是增根，否则这个根就是原分式方程的根. 若解出的根是增根应舍去，则原方程无解. 如果分式本身约分了，也要带进去检验.

在列分式方程解应用题时，不仅要检验所得的解是否满足原方程，还要检验是否符合题意.

一般的，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为零，因此要将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为零，则是原方程的解.

注意：（1）注意去分母时，不要漏乘整式项.

（2）增根是分式方程去分母后化成的整式方程的根，但不是原分式方程的解.

（3）增根使最简分母等于 0.

51. 猎犬与兔子

猎犬是打猎的好帮手，活泼，忠诚的天性赢得了家中爱犬的地位. 一位猎人带爱犬去打猎，在森林中，发现前方 20 米处有一只奔跑的野兔，立即放猎犬追赶上去，

猎犬步子大，它跑 5 步的路程，兔子要跑 9 步；但兔子动作快，猎犬跑 2 步的时间，兔子却能跑 3 步．猎犬跑出多远才能追上兔子？

解析：设猎犬要跑 x 米才能追上兔子，由题意：兔与猎犬所用时间比为：

$$\frac{3}{9}\div\frac{2}{5}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$$

距离（速度）比为：

$$(x-20):x=\frac{5}{6}$$

解得：$x=120$（米）

答：猎狗要跑出 120 米才能追上兔子.

52. 自行车与公交车

谢尔盖每天骑自行车上下班，同时有一路公交车沿他上下班的路线运行，谢尔盖一边骑自行车，一边注意来往的公交车．他发现：每隔 12 分钟有一辆公交车从他身后超过，每 4 分钟有一辆公交车迎面开来．假设谢尔盖和公交车都是匀速行使而且公交车的起点和终点是以时间间距发车，应该是几分钟发一辆公交车？

解析：设他的速度是 x 千米/分钟，公交的速度是 y 千米/分钟，两公交之间的距离是 z 千米，则：

$$\begin{cases}(x+y)\times 4=z & (1)\\(y-x)\times 12=z & (2)\end{cases}$$

由（1）得：

$$x=\frac{z}{4}-y \qquad (3)$$

将式（3）代入式（2）整理得：

$$\frac{z}{y}=6\text{（分钟）}$$

所以每 6 分钟发一辆公交车.

答：每 6 分钟发一辆公交车.

53. 传令兵的路程

有一支大军，首尾长达 50 英里，大军以匀速向前推进时，一个传令兵从队伍的最后面，骑着快马向前疾驶，传达一个紧急命令．任务完成后，他马不停蹄，立即

回到他的原来位置．说也正巧，他返回原位时，大军正好向前推进了 50 英里．试问：传令兵一共走了多少路？

解析：设整个队伍的长度为 1，大军向前推进这一长度的所需时间也等于 1，由此可见大军行进的速度也是 1．设 x 为传令兵所走的路程，当然这也就是他的速度．他在向前疾驶时，他与前进中的部队的相对速度为 $x-1$；而在返回途中，相对速度则是 $x+1$．前进也好，返回也好，每一段路程都是 1（相对于这支大军而言），而这两段路程是在单位时间内完成的，从而我们可以得到下列方程：

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$$

此方程经过整理、化简后，可得一元二次方程：

$$x^2-2x-1=0$$

采用配方法：

$$(x-1)^2=2$$

采用直接开方，解得：

x 的正根为 $1+\sqrt{2}$

大军的长度：

$$50\times(1+\sqrt{2})=120.7\text{（英里）}$$

换句话说，传令兵所走过的路程等于大军的长度再加上该长度的 $\sqrt{2}$ 倍．

答：传令兵一共走了约 120.7 英里．

54．猴子摘核桃

秋天一棵棵核桃树枝繁叶茂，硕果累累．但核桃好吃，果难摘，为此人们想到用训练有素的猴子摘核桃．两只猴子：美猴王和小天才．

美猴王 4 天摘完核桃总数的一半，加 1 天小天才，两只猴子合摘，1 天摘完核桃总数的另一半，小天才单独摘核桃需要几天？

解析：美猴王 4 天摘完核桃总数的一半，8 天可摘完，1 天摘核桃总数的 $\frac{1}{8}$，设小天才 x 天摘完核桃，则小天才每天可摘完核桃总数的 $\frac{1}{x}$．根据题意，美猴王和小天才合摘，1 天摘完核桃的总数另一半，可列方程：

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\right)\times 1=\frac{1}{2} \tag{1}$$

由式（1）得：

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

解此方程可得：

$$x=\frac{8}{3}\ （天）$$

答：小天才单独摘核桃需要$\frac{8}{3}$天.

55. “猫头鹰”号特快列车

“猫头鹰”号特快列车的机械师大吉姆说道：“离站后一小时，我们把机车头的一只汽缸放了汽，以原来速度的3/5继续跑完这段旅程，这样一来就使我们到达下一车站的时间误了两小时．如果再驶过50英里以后放汽，那么列车就会比现在早到40分钟．”

这两个车站之间的距离是多少？

解析：40分钟相当于$\frac{2}{3}$小时.

设x为第一小时所走过的距离，设y为剩下的距离．火车的正常速度等于x（英里/小时），放慢后的速度等于$\frac{3}{5}x=0.6x$，而行完这段路程的正常时间是：

$\frac{x+y}{x}$，依题意：

$$\begin{cases}1+\dfrac{y}{0.6x}=\dfrac{x+y}{x}+2 & (1)\\[2ex] \dfrac{x+50}{x}+\dfrac{y-50}{0.6x}=\dfrac{x+y}{x}+\left(2-\dfrac{2}{3}\right) & (2)\end{cases}$$

由式（1）解得

$$y=3x \qquad (3)$$

化简式（2）得：

$$0.4y=20+0.8x \qquad (4)$$

将式（3）代入式（4）得：$0.4x=20$.

解得：$x=50$，于是$y=3x=3\times 50=150$

50+150=200（英里）

答：两站之间的距离是200英里.

56. 狮子和羚羊

在广袤的非洲大草原上，一天早晨，东方刚刚露出鱼肚白，一只羚羊从睡梦中猛然惊醒．它的另一只同伴对它大喊：“赶快跑，如果慢了，就会被狮子吃掉!”

于是，羚羊起身就跑，向着太阳升起来的方向飞奔而去．

就在羚羊醒来的同时，一只狮子也惊醒了．它看到有几只羚羊在跑，它不由得想：“赶快跑，如果慢了，就没饭吃，我已经好长时间不知道肉是什么滋味了，再这样下去，那岂不是要饿死!”

于是，起身就跑，也向着太阳奔去．

它们谁都是没命地跑，前边的羚羊看到身后有狮子，所以跑得飞快；后边的狮子看到前边有食物，也没命地跑．

谁快谁就赢，谁快谁生存．一个是自然界兽中之王，一个是食草的羚羊，等级差异，实力悬殊，但生存却面临同一个问题——如果羚羊快，狮子就会饿死；如果狮子快，羚羊就被吃掉．

大道理：对待时间，你永远都不能轻视．只有不断向前奔跑的人，才不会被“吃掉”，才不会被社会淘汰．

羚羊被狮子追赶时，羚羊的逃跑方向永远都是没有错的，而且速度要比狮子快很多．按说，如此的羚羊是永远也不会被狮子吃掉的，狮子的速度远不及羚羊，问题是慌乱之中，羚羊总要犯一些小错，在左拐右拐中，羚羊的角度总有些不正确，会出现 2/100 的错误率，这就给狮子提供了机会．

如果羚羊与狮子速度的和是 125 千米/小时，速度的积是 3900 千米/小时．那么，羚羊与狮子奔跑的速度是多少？

解析：设羚羊的速度为 x，狮子的速度为 y，则

$$\begin{cases} x+y=125 & (1) \\ x \cdot y=3900 & (2) \end{cases}$$

将式（2）变形为：

$$y=\frac{3900}{x} \qquad (3)$$

将式（3）代入式（1）

$x+\dfrac{3900}{x}=125$，整理得：

$$x^2-125x+3900=0$$

根据求根公式解得：

$$x_1=65\ ,\ x_2=60$$

将 $x_1=65$，$x_2=60$ 分别代入 $x+y=125$ 式，解得：

$$y_1=60\text{（千米）},\ y_2=65\text{（千米）}$$

由于羚羊的速度快，所以，$x_1=65$ 千米/小时，$y_1=60$ 千米/小时为问题的一组解．即羚羊与狮子奔跑的速度分别为 65 千米/小时和 60 千米/小时．

答：羚羊与狮子奔跑的速度分别为 65 千米/小时和 60 千米/小时．

57．牛顿的三个牧场问题

三个牧场，分别是 $3\frac{1}{3}$ 公顷、10 公顷和 24 公顷．这三个牧场种草的条件完全相同，种草的方法和生长状况也相同．在第一个牧场里有 12 头牛饲养了 4 周；第二个牧场，有 21 头牛饲养了 9 周，这时前两个牧场的草全部吃光了，不得不停用．问第三个牧场 18 周内能饲养几头牛？

解析：这个问题关键是要考虑草的生长因素．

设一公顷地一周所长草量相当于 y 公顷地的草量，则第一个牧场一周长草 $3\frac{1}{3}y$，4 周后长的草量为 $3\frac{1}{3}y\times4=\frac{40}{3}y$，这相当于面积为 $\left(\frac{4}{3}+\frac{40}{3}y\right)$ 公顷．12 头牛吃了 4 周的草量，那么每头牛每周吃

$\frac{1}{48}\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right)=\frac{10+40y}{144}$ 公顷的草量．

同样，考虑一头牛在第二个牧场每周吃草量．

设 1 公顷地 1 周增加草量相当于 y 公顷地的草量，那么 1 公顷地 9 周增加草量 $9y$，10 公顷地 9 周增加草量 $90y$．

21 头牛，饲养 9 周，所需草地面积（设草不再生长）为（$10+90y$）公顷，1 头牛 1 周必须占有牧场面积为：

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{1}{144}\left(10+40\times\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{54}$$

再考虑第三个牧场．设所求牛数为 x，则有方程：

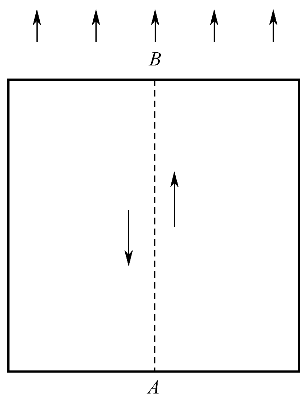
$$\frac{24+24\times18\times\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54}$$

解得：$x=36$（头）．

答：第三个牧场 18 周内能饲养 36 头牛．

58. 警犬护队

一排成 50 米见方队的特种兵，以不变的速度朝前行进．他们的一只警犬，从后排的中心（下图中所示的 A 点），向前排的中心（下图中所示的 B 点）沿直线小跑，到达 B 点后沿原来的路线返回，当警犬回到 A 点时，特种兵方队正好行进了 50 米．假设警犬小跑的速度保持不变，并且转身时所费的时间忽略不计，那么，它小跑了多长距离（注意：A、B 两点是随方队移动的动点）？



解析：为了简化讨论，我们可以作以下的假定：

令方队的长度即 50 米为一个长度单位，方队行进一个长度单位所需的时间为一个时间单位．这样，方队行进的速度值也是 1．

令 x 为警犬跑的全部距离．由条件，警犬跑完这段距离正好用了一个时间单位，因此，x 也是警犬的速度．在警犬朝前跑时，它相对于方队的速度是 $x-1$；在朝回跑时，它相对于方队的速度是 $x+1$．警犬是在一个时间单位里跑完来回两程的，因此，下面的等式成立

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$$

用求根公式的正根：

$$x=1+\sqrt{2}$$

因此，它实际跑的距离是：

$$(1+\sqrt{2})\times 50\approx 121\text{（米）}$$

答：警犬跑了 121 米的距离．

59. 鸡蛋的价钱

“我买鸡蛋时，付给杂货店老板 12 美分．”一位厨师说道，“但是由于嫌它们太小，我又叫他无偿添了 2 个鸡蛋给我．这样一来，每打（12 个）鸡蛋的价钱就比当初的要价降低了 1 美分．”问：厨师买了多少个鸡蛋？

解析：设厨子先买了 x 个鸡蛋，之后经过一番口水战，又白拿了两个蛋，所以一打蛋比原来的便宜了一美分，即每个鸡蛋比原来的便宜了 $\frac{1}{12}$ 美分.

原来的每个鸡蛋价格为 $\frac{12}{x}$，又叫杂货店老板无偿添加了 2 个鸡蛋后每个鸡蛋价格为 $\frac{12}{x+2}$，所以

$$\frac{12}{x}-\frac{12}{x+2}=\frac{1}{12}$$

把以上方程整理，得:

$$x^2+2x-288=0$$

根据一元二次方程求根公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

解以上方程，得 :

$$x_1=16（个）$$
$$x_2=-18（个）$$

买−18 个鸡蛋，不合题意. 所以，厨子最终买了 16+2 个鸡蛋，也就是 18 个鸡蛋. 美国物价能是这么便宜吗？这仅仅是一道数学趣题.

答：厨师买了 16 个鸡蛋.

九、二次根式趣题

一般形如 $\sqrt{a}(a \geqslant 0)$ 的代数式叫做二次根式．

对于二次根式的化简，除了掌握基本概念和运算法则外，掌握一些特殊的方法和技巧，会收到事半功倍的效果．

解二次根式可采用：1．公式法、2．观察特征法、3．运用配方法、4．平方法、5．恒等变形公式法、6．常值换元法、7．裂项法、8．构造对偶式法、9．由里向外，逐层化简．

60. 阿周那的箭

勇士阿周那在一次战斗中被激怒了，为了杀死对手卡那，接连射了一筒箭．其中一半挡开他对手的箭；该筒箭数的平方根的四倍射杀了对手的马；六箭射死萨离那（卡那的战车驭者）；三箭折杀了对方的保护伞、军旗和弓；一箭射杀了卡那的咽喉．试问阿周那射了多少箭？

解析：这个趣题源至 12 世纪印度数学家婆什迦罗的著作，会解二次方程的人都可毫无困难的得到正确的解.

设阿周那射了 x 只箭，则:

$$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1=x$$

即 $x-8\sqrt{x}-20=0$

从而解得 $\sqrt{x}=10$ 即 x=100（支），所以阿周那有 100 支箭.

答：阿周那射了 100 支箭.

61. 三个村庄

张庄（A）、李庄（B）、赵庄（C）三个村庄中，每两个村庄间的距离都相等，要在张庄建造一个水塔，把水塔中的水通过铺设在地下的水管引到李庄、赵庄．设计人员设计了如下三种铺设方案，你认为哪种方案用的水最少？为什么？

注：图 2 中 $AD \perp BC$，图 3 中 $AO=BO=CO$.

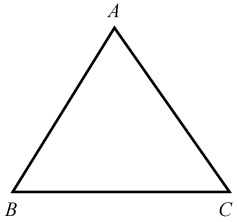


图 1

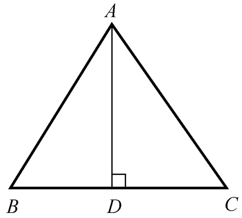


图 2

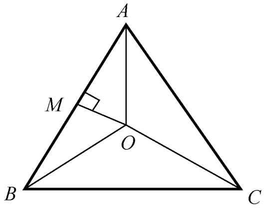


图 3

解析：设等边三角形 ABC 的边长为 a.

图 1 情况，总水管长度为：$2a$；

图 2 情况，高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，总水管长度为：

$a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\approx 1.87a$;

图 3 情况，过 O 作 AB 的垂线，交 AB 于 M

$AM=\frac{a}{2}$，$OA=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，总水管长度为：

$$OA+OB+OC=3OA=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}a\approx 1.73a$$

$$1.73<1.87<2$$

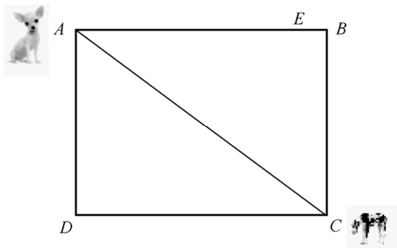
所以，图 3 情况用水管最少.

答：图 3 情况用水管最少.

62. 两狗夺食

小白狗和小花狗在一长方形池塘边上玩耍，如下图所示，突然发现池塘边 E 点处有一块骨头，两只小狗以同样的速度拼命地向骨头跑去，并同时抓到骨头，厮打起来…….

如果 AC=100 米、BC=60 米，那么骨头所处地点 E，离池塘东北角 B 点多远？



解析：根据两只小狗以同样的速度向骨头跑去，同时到达 E 点，说明 E 点离池塘西北角 A 点的距离 $\dfrac{AB+BC}{2}$.

$\because AC$=100 米、BC=60 米，根据勾股定理：$AB=\sqrt{100^2-60^2}=80$（米）

$\therefore E$ 点离池塘西北角 A 点的距离是$=\dfrac{AB+BC}{2}=\dfrac{60+80}{2}=70$（米）

因此，骨头所处地点 E，离池塘东北角 B 点的距离：80−70=10（米）.

答：骨头所处地点 E，离池塘东北角 B 点的距离 10 米.

63. 苍鹰与兔子

苍鹰是怎么抓住了兔子的呢？兔子不会静静地等待苍鹰来抓它．它要逃跑，它会转弯，它会虚晃一枪，会用假动作欺骗苍鹰，因此，抓兔子的过程，是一个兔子不断逃跑，苍鹰不断地通过反馈进行调控的过程.

一只苍鹰在 100 米高空飞行，它看到它的正下方有一只兔子，这时兔子也发现了苍鹰．苍鹰以 30 米/秒的速度追赶兔子，兔子以 10 米/秒的速度向正西方逃向 30 米远处的一个地洞，苍鹰能追上兔子吗？

解析：兔子逃到地洞只需 30÷10=3 秒，根据勾股定理，苍鹰需要飞行:

$$\sqrt{30^2+100^2}\approx104.4\text{（米）}$$

而苍鹰三秒只能飞行 30×3=90（米）

所以，苍鹰不能追上兔子.

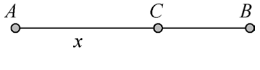
答：苍鹰不能追上兔子.

64. 高跟鞋的高度

美是一种感觉，本应没有什么客观的标准，但在自然界里，物体形状的比例却提供了在匀称与协调上的一种美感的参考，在数学上，这个比例称为黄金分割.

把一条线段分成两段, 使其中较长的一段是原线段与较短一段的比例中项，叫做把这条线段黄金分割.

如下图所示，设 $AB=1$，$AC=x$，



根据比例中项性质，$\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x}{1}$，则：$x^2+x-1=0$ ，取其正数解得：$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\approx 0.618\,033\,989\cdots$

这是个无理数，以下记为φ，称为黄金比，φ在一般的近似计算中取作 0.618，这是一个比较好的数．

在人体躯干（由脚底至肚脐的长度）与身高的比例上，肚脐是理想的黄金分割点，也就是说，若此比值越接近 0.618，就越给别人一种美的感觉．如果某女士身高为 1.60 米，躯干与身高的比为 0.60，为了追求美，她想利用高跟鞋达到这一效果，那么她选的高跟鞋的理想高度约是多少？

解析：先求得下半身的实际高度，再根据黄金分割的概念，列出方程：$\dfrac{160\times 0.6+x}{160+x}=0.618$，解得：$x\approx 7.5$（厘米）

答：她选的高跟鞋的理想高度约是 7.5 厘米．

65. 二次根式的“穿墙术”

在《聊斋志异》中，我们经常能看到“穿墙术”：一个人站在一堵墙前，眼睛一闭，头往墙上撞去，再睁开眼时，身体已经跑到墙的另一侧．当然，这只是神话故事．但大千世界无奇不有，在数学王国里，却有“穿墙术”．

请看下面几个例子：

$$\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}},\quad \sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$$

不难发现，根号内带分数的整数部分可以“钻”到根号外．二次根式也有“穿墙术”，其实不尽然，例如：

$$\sqrt{3\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}\neq 3\sqrt{\frac{2}{3}}$$

那么什么样的二次根式，具备“穿墙术”的特征呢？

解析：$\sqrt{a\dfrac{c}{b}}=\sqrt{\dfrac{ab+c}{b}}$，当 a、b、c 都是正整数，$ab+c=a^2c\cdots\cdots$（1）时：

$$\sqrt{a\frac{c}{b}}=\sqrt{\frac{ab+c}{b}}=\sqrt{\frac{a^2c}{b}}=a\sqrt{\frac{c}{b}}$$

根据式（1）$ab=c(a^2-1)$，当 b、c 互质时，$a=c$，$b=a^2-1$．于是，

$\sqrt{a\dfrac{c}{b}}=\sqrt{a+\dfrac{a}{a^2-1}}=\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2-1}}=a\sqrt{\dfrac{a}{a^2-1}}$，$a\geqslant 2$．

答：二次根式$\sqrt{a\dfrac{c}{b}}$，只有满足$a=c$，$b=a^2-1$，$a\geqslant 2$（正整数）时，才具

备“穿墙术”特征.

66. 1996 次幂

已知，$x=\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}$，求多项式$(2x^5+2x^4-53x^3+54)^{1996}$的值？

解析：由于$2x=\sqrt{111}-1$　　　　（1）

所以: $2x+2=\sqrt{111}+1$； $\left[(\sqrt{111}+1)\ x-2\right]x^3=\left[(\sqrt{111}+1)\times\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}-2\right]x^3=53x^3$；

又根据式（1）　$\sqrt{111}+1=2x+2$，

所以，$\left[(\sqrt{111}+1)\ x-2\right]x^3=2x^5+2x^4-2x^3$；

$(\sqrt{111}+1)\times\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}-1=54$

$(\sqrt{111}+1)\times\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}-1=(2x+2)\ x-1=2x^2+2x-1$

所以，$2x^5+2x^4-53x^3+54$

$=2x^5+2x^4-\left[(\sqrt{111}+1)\ x-2\right]x^3+\left[(\sqrt{111}+1)\times\dfrac{\sqrt{111}-1}{2}\right]-1$

$=2x^5+2x^4-(2x^5+2x^4-2x^3)-\left[(2x+2)\ x^2+2x^2\right]-1$

$=-1$

所以$(2x^5+2x^4-53x^3+54)^{1996}=(-1)^{1996}=1$

答：$(2x^5+2x^4-53x^3+54)^{1996}=1$

十、相　似　形

形状相同的图形叫做相似图形.

相似多边形的性质

（1）对应内角相等;

（2）两个图形对应边成比例;

如果是正方形，则只要边长成比例就可以，所以所有的正方形，正三角形都相似，长方形是长和高对应成比例.

（3）相似多边形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

相似三角形的性质定理:

（1）相似三角形的对应角相等.

（2）相似三角形的对应边成比例.

（3）相似三角形的对应高线的比，对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

（4）相似三角形的周长比等于相似比.

（5）相似三角形的面积比等于相似比的平方.

67. 传国玉玺

相传某朝代的一个皇帝，有一块勾股形的白玉，勾长三寸，股长四寸，弦长五寸. 他要想截角为圆，制成传国的玉玺，曾下令全国，征求算家，算出这玉玺最大能有多长的直径. 当时有一个聪明的人，算出直径刚好二寸，因此得了一个官职.

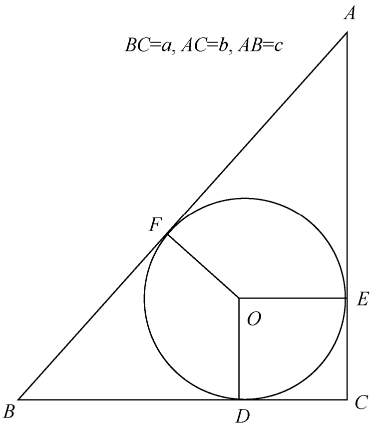
在魏刘徽的“九章算术”里面，可以看到这一个问题，称为“勾股容圆”.

古书中因为这圆的直径，等于它的外切正方形的边长，所以称做“黄方”. 这玉玺问题中的各数——黄方二，勾三，股四，弦五，刚巧是四个连续整数，也是一件很奇妙的事.

这个“勾股容圆”问题，对现在只有初中数学知识的人就能完美解答出来，但对古人，这却是不容易的. 清人吴诚著《海镜一隅》一书，推得求“黄方”的不同形式的十法. 这十法，可能知其者就不甚多了. 现将其二种解法介绍如下，以开拓读者视野.

解析：解法 1：设 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，内切圆 O

的半径为 r，直径为 d，如图（1）所示.



（1）

求证：$d = a+b-c$. （公式 1）

证明：设 D、E、F 为切点，连结 OD，OE，OF，因 $AE=AF$，$BD=BF$，

所以 $CD+CE=BC-BD+AC-AE=BC+AC-AB$.

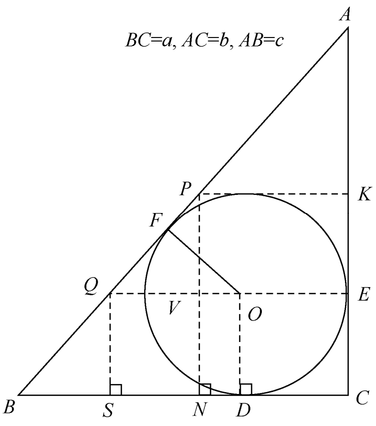
又因 $ODCE$ 是正方形，

所以 $CE+CD=d$，

即 $d=a+b-c$.

解法 2：求证 $d = \dfrac{2ab}{a+b+c}$ （公式 2）

**解析**：添作辅助线如图（2）所示.



（2）

在$\triangle PQV$ 和$\triangle OQF$ 中，

$\angle PVQ = \angle OFQ = 90°$，

$\angle PQV=\angle OQF$，

$PV=OF$,

$\therefore \triangle PQV \cong \triangle OQF$.

$\therefore PQ=QO=SD$. （1）

同理$\triangle PQV \cong \triangle QBS$,

$\therefore QV=BS$ （2）

又 $PV=DC$, （3）

式（1）+式（2）+式（3）得 $PQ+QV+PV=BC=a$.

设 $QV=a'$，$PV=b'$，$PQ=c'$,

则 $a'+b'+c'=a$.

又因$\triangle ABC \backsim \triangle PQV$,

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}, \frac{b}{b}=\frac{b'}{b'}, \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$.

均乘以$\frac{1}{2}$得 $\frac{a}{2b}=\frac{a'}{2b'}$，$\frac{b}{2b}=\frac{b'}{2b'}$，$\frac{c}{2b}=\frac{c'}{2b'}$，

三式相加得$\frac{a+b+c}{2b}=\frac{a'+b'+c'}{2b'}$。

但$a'+b'+c'=a$，$2b'=2\mathrm{r}=d$，

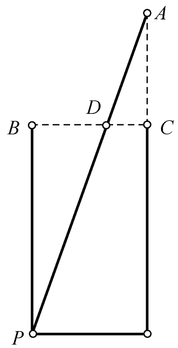
代入得$\frac{a+b+c}{2b}=\frac{a}{d}$。

$\therefore d=\frac{2ab}{a+b+c}$。

68. 井中立木

今有井径五尺，不知其深．立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸．问井深几何？

释义：现在井的直径为 5 尺，不知道多深．从井边 5 尺高的树旁边看水井，看到树在井中的倒影是 4 寸，如下图所示，问井的深度？



解析：依题意设 CB=5 尺，CA=5 尺，CD=4 寸.

$\because \triangle ACD \backsim \triangle PBD$

$\therefore \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{BP}{CB-CD}$

$$BP=\frac{CA(CB-CD)}{CD}=\frac{50(50-4)}{4}=575$$

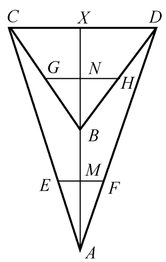
答：井深 575 寸，合五丈七尺五寸.

69. 大象身长

小王去动物园玩，看到大象很悠闲地站在那儿．他忽然联想到曹冲称象的故事，心想曹冲能称出大象的体重，我能不能量出大象的身长呢？

他眉头一皱，计上心来，从口袋里拿出两支铅笔，先手握短铅笔伸直胳膊，用眼睛瞄准铅笔两端正好看到大象的首尾．然后换握长铅笔，瞄准铅笔两端向前走了二十步，正好又看到大象的首尾．他量一量两支铅笔的长分别为 8 厘米和 16 厘米，胳膊长为 40 厘米．每一步长 50 厘米，就很快算出大象身长为 4 米．小花十分惊奇，问小王是怎么算出来的？

解析：如下图所示，假设小王开始立于 A 点，后来走到 B 点．大象身长为 CD，$AM=BN=40$ 厘米是胳膊长度，$EF=8$ 厘米是短铅笔长，$GH=16$ 厘米是长铅笔长，$AB=50\times20=1000$ 厘米．令 $BK=x$.



$\because \triangle AEF \backsim \triangle ACD$

$$\therefore \frac{40}{8}=\frac{1000+x}{CD} \qquad (1)$$

$\because \triangle BGH \backsim \triangle BCD$

$$\therefore \frac{40}{16}=\frac{x}{CD} \qquad (2)$$

式（1）−式（2）得：

$$\frac{40-20}{8}=\frac{1000+x-x}{CD}$$

$\therefore CD=\frac{1000\times8}{20}$=400（厘米）=4（米）

答：大象身长 4 米.

这种简易的测量方法，很有实用价值. 战士们在战场上，在已知坦克车的身长时，可用类似方法测出敌人的坦克与战士之间的距离，就可准确地用反坦克炮及时消灭敌人的坦克.

70. 望敌远近

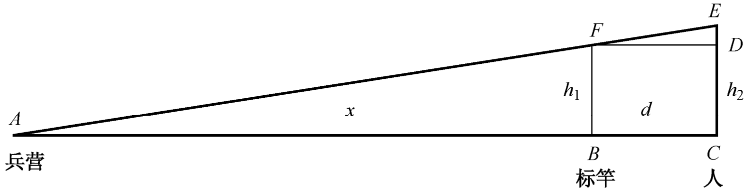
问敌军处北山下原，不知相去远近，乃于平地立一表，高四尺，人退表九百步（步法五尺），遥望山原，适与表端参合，人目高四尺八寸，欲知敌军相去几何？

（选自《数书九章》）

释义：敌人的兵营驻扎在北面山脚下的一块平地上，不知相距多远. 为测量敌我之间的距离，选择一块平地，立一标竿，标竿高 $h_1=4$ 尺，人后退 $d=900$ 步，目测兵营，人目高 $h_2=4.8$ 尺，人目、标竿端和山脚 3 点在一条直线上. 求敌我之间的距离（见上图）.

解析：如下页图所示，设 $AB=x$：

由△ABF∽△FDE 得



望敌远近

$$\frac{x}{d}=\frac{h_1}{h_2-h_1} \tag{1}$$

$$x=\frac{dh_1}{h_2-h_1}$$

已知　1 步=5（尺），所以 d=900（步）=4500（尺），

将 h_1=4（尺），h_2=4.8（尺），d=900（尺）代入式（1）式（2）得

$$x=\frac{4500\times 4}{4.8-4}=22\,500\text{（尺）}$$

又 1 里=360 步

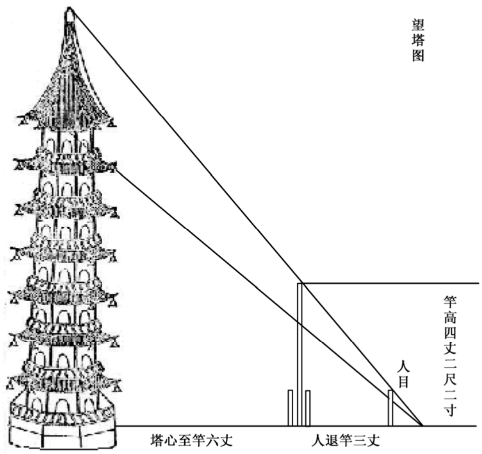
所以 $x=22\,500$（尺）$=4500$（步）$=12\frac{1}{2}$（里）.

答：敌我之间的距离为一十二里半.

71．表望浮图

问有浮图欹侧，欲换塔心木，不知其高，去塔六丈，有刹竿，亦不知其高，竿木去地九尺二寸始钉锔一十四枚，锔长五寸，每锔下股，相去二尺五寸，就竿为表，人退竿三丈，遥望浮图尖，适与竿端斜合．又望相轮之本，其景入第十枚上股，人目去地四尺八寸，心木放三尺为楯茆剪截．欲求塔高轮高，合用塔心木长各几何？

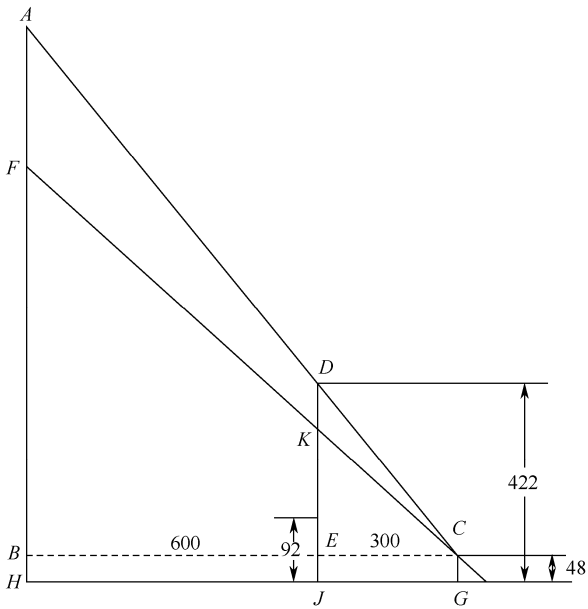
选自《数书九章》



释义：有一宝塔倾斜，欲换塔心木，不知塔有多高，离塔六丈的地方有刹竿（标竿），也不知道它的高，从地面起到竿九尺二寸开始钉锔（扁平两脚钉），到竿顶共一十四枚，枚长五寸，每锔下股，到另一锔下股，距离二尺五寸，以竿为标，人退竿三丈，遥望塔尖，人目、标竿上端、塔尖在一条直线上. 又望相轮（套在刹杆上的圆盘）之本，人目、锔第十枚上股、相轮木端在一条直线上. 人目离地四尺八寸，心木留出三尺为楯茆剪截，求塔高轮高，共享塔心木长各多少？

注：攲侧 qīcè；释义：倾斜；歪斜.

解析：见下图：



$\because\ \triangle DEC \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CE}{BC}$

$\therefore AB=\dfrac{DE\times BC}{CE}$

又$\because$竿高 $DJ=92+13\times 25+5=422$，

$DE=422-48=374$， $BC=600+300=900$，

$\therefore AB=\dfrac{374\times 900}{300}=1122$

塔高： $AH=AB+BH=1122+48=1170$（寸），约为十一丈七尺.

求塔身高、相轮算法如下：

$\because \triangle FBC \backsim \triangle KEC$

$\therefore \dfrac{KE}{FB}=\dfrac{CE}{BC}$

$FB=\dfrac{KE\times BC}{CE}$

$\because KE=92+(10-1)\times 25+5-48=274$

$\therefore FB=\dfrac{274\times 900}{300}=822$

塔身高：$FH=FB+BH=822+48=870$（寸），约为八丈七尺.

轮高：1170−870=300，约为三丈.

塔心木：870+30=900，约为九丈.

答：塔高十一丈七尺，相轮高三丈，塔身高八丈七尺，塔心木九丈，内三尺为减截穿凿楯茆.

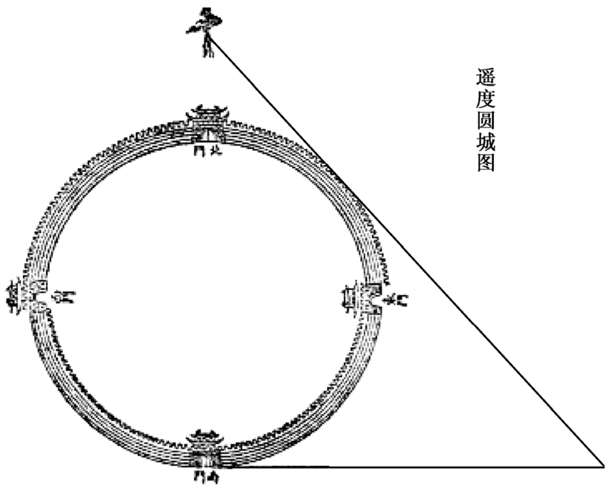
南宋著名数学家秦九韶以湖州多宝塔（俗称道场塔）为实际背景，设计了著名的测量问题“表望浮图”.

屹立于湖州正南 5 千米的道场山巅，俗称道场塔，又名文笔塔、文风塔. 因其踞高而立又紧傍 104 国道，故素为湖州标志，古代有：“一天不见多宝塔，思乡之情油然生”之说.

72. 遥度圆城

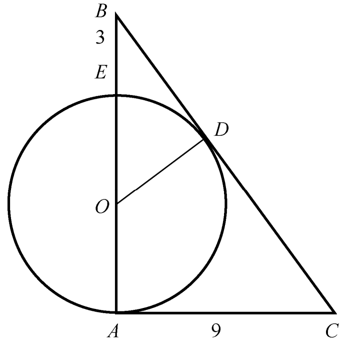
问有圆城不知其径，四门中开，北外三里有乔木，出南门便折东行九里乃见木. 欲知城周径各几何？（周用古法）

（选自《数书九章》）



释义：今有一圆城（见下页图），不知周长和直径，四门中开. 出北门在正北

3 里处有一棵大树，出南门向东行 9 里，正好看见大树，求圆城的半径和周长.



遥度圆城

解析：设圆城的直径为 x，则半径为 $\frac{x}{2}$． B 为大树，

C 为测点（见上图）

$$EB=3,\quad AC=9$$

由 $\triangle BOD \backsim \triangle BCA$

$$\frac{OD}{AC}=\frac{BD}{AB} \tag{1}$$

$$OD=\frac{x}{2},\ AC=9,\ AB=x+3$$

$$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}+3\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{3(x+3)}$$

代入式（1）化简得

$$\frac{x}{18}=\frac{\sqrt{3(x+3)}}{x+3}$$

两端平方

$$x^2(x+3)^2=972(x+3)$$

$\because x+3\neq 0$

$\therefore x^2(x+3)=972$

即 $x^3+3x^2-972=0$

分解因式得：$(x-9)(x^2+12x+108)=0$

由于 $x^2+12x+108=0$ 无实根

所以，$x=9$，周用古法，$\pi=3$，周长 $\pi x=27$（里）.

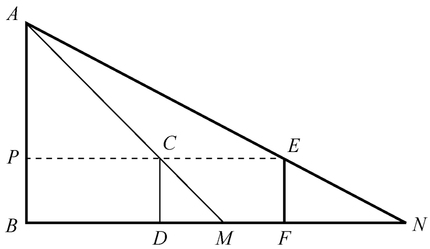
答：半径为 9 里，周长为 27 里.

73. 有望海岛

“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合．从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合．问岛高及去表各几何？”．

释义：现想测量一座海岛，竖立两根高都为 3 丈的杆子，它们前后相距一千步，后杆、前杆与海岛在一直线上．从前杆向后退 123 步，人眼着地看岛峰，正好与杆顶重合；从后杆后退 127 步，人眼着地看岛峰，也正好与杆顶重合．问岛高和岛离前杆的距离各是多少？

解析：根据相似三角形边长成比例的原理，见下图，过 EC 做平行线交 AB 于 P.



$\because \mathrm{Rt}\triangle APE \backsim \mathrm{Rt}\triangle EFN$,

$$\frac{AP}{EF}=\frac{PE}{FN}$$

$$\therefore AP \cdot FN = PE \cdot EF \qquad (1)$$

又$\because \triangle APC \backsim \triangle CDM$,

$$\frac{AP}{CD}=\frac{PC}{DM}$$

$$\therefore AP \cdot DM = PC \cdot CD \qquad (2)$$

式（1）−式（2）:

$$\begin{aligned}&AP(FN-DM)\\&=PE\cdot EF-PC\cdot CD\\&=(PE-PC)\cdot CD\\&=CE\cdot CD\\&=DF\cdot CD\end{aligned}$$

$$\therefore AP=\frac{CD\cdot DF}{FN-DM}$$

∴岛高:

$$
\begin{aligned}
AB &= AP + CD \\
&= \frac{CD \cdot DF}{FN - DM} + CD \\
&= \frac{5 \times 1000}{127 - 123} + 5 \\
&= 1255\text{（步）}
\end{aligned}
$$

因 1255 步，约为 4 里 55 步

又 $\because \triangle ABM \backsim \triangle CDM$

$\therefore \dfrac{BM}{DM} = \dfrac{AB}{CD}$

$\therefore BM = \dfrac{DM \cdot AB}{CD}$

$$
\begin{aligned}
BD &= BM - DM \\
&= \frac{DM \cdot AB}{CD} - DM \\
&= \frac{123 \times 1255}{5} - 123 \\
&= 30\ 750\text{（步）}
\end{aligned}
$$

30 750 步，约为 102 里 150 步.

答：岛高四里五十五步；去表一百二里一百五十步.

注：按当时古制 3 丈 = 5 步，1 里=300 步计算.

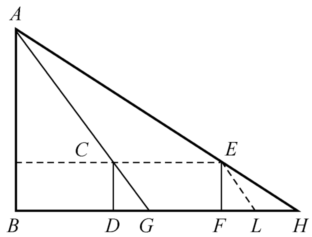
因为 1000/（127−123）是两个差的商，所以这类求法在古时叫作“重差术”.

74. 窥望海岛

窥望海岛歌：

望岛知高法术奇．立来两表并高低．表间尺数乘高数，以作实情更不疑，二表退行相减数，以余为法以除之．更将一表相加并，海岛巅高尽可知．另置表间之尺数，以乘前表退行宜．前法除之知隔水，水程远近不差池．

为了求出海岛上的山峰 AB 的高度，在 D 处立一标杆 DC，在 F 处立一标杆 FE，标杆的高相等，即 $DC = FE$．两标杆的距离为表间尺数 DF， AB、CD、EF 都在同一平面内．从标杆 DC 后退 DG 到 G 点，看到海岛峰 A 与标杆顶端 C 在一条直线上；从标杆 FE 后退 FH 步到 H 点，也看到岛峰 BD 与标杆顶端 E 在一条直线上．求高峰高 AB 和它与第一根标杆的距离 BD．



根据窥望海岛歌，可给出以下公式：

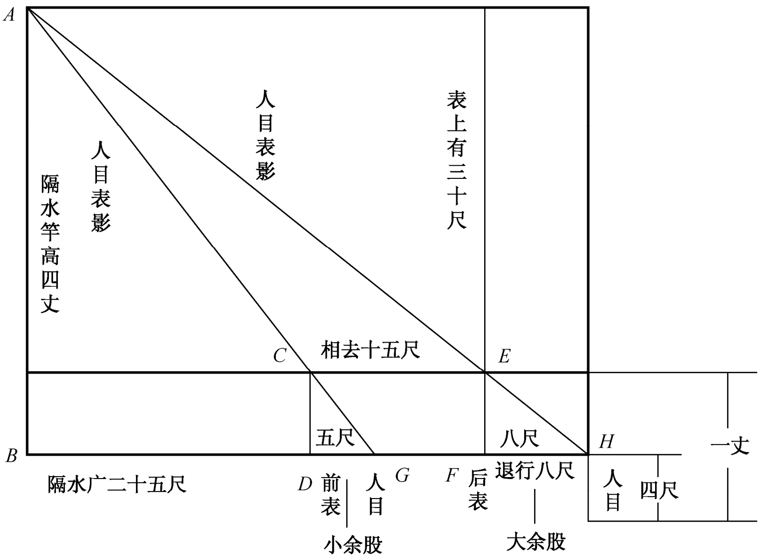
岛高

$$AB=\frac{DF\times CD}{HF-DG}+CD \qquad (1)$$

水程

$$BD=\frac{DF\times DG}{HF-DG} \qquad (2)$$

假如隔水有竿（如下图所示），不知其高．立两表，各长一丈，前后参直①相去一十五尺，从前表退行五尺，人目四尺，窥表与竿齐，复从后表退八尺窥之，亦与竿齐．问竿高隔水各若干？



隔水竿高图

解析：根据公式（1）岛高

$$AB=\frac{DF\times CD}{HF-DG}+CD=\frac{15\times 6}{8-5}+10=40\text{（尺）}=4\text{ 丈}$$

根据公式（2）水程

$$BD=\frac{DF\times DG}{HF-DG}$$

$=\dfrac{15\times 5}{8-5}=25$（尺）$=2.5$（丈）

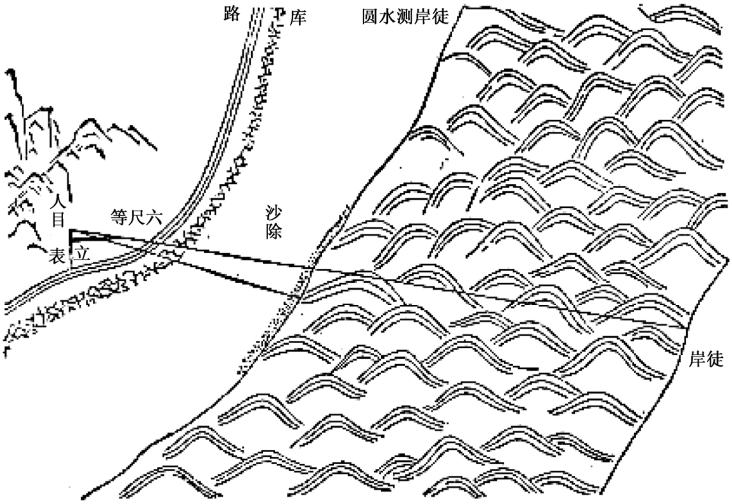
答：竿高四丈，隔水广（宽）二丈五尺.

注：①参直：参验证明.

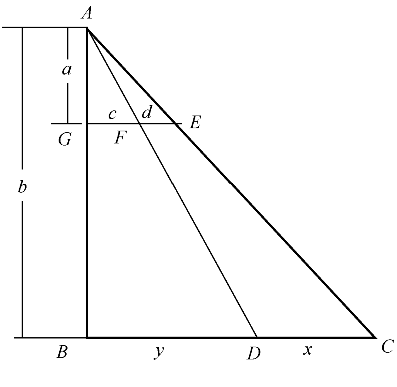
75. 徒岸测水

“问行师遇水，须计篾缆．今垂绳量徒岸，高三丈，人立其上（b），欲测水面之阔（x）．以六尺（$c+d$）竿为矩”平持去目下五寸（a）．今矩端参合．又望水此岸沙际（y），入矩端三尺四寸（d）．人目高五尺．其水面阔几何．

（选自《数书九章》）



解析：



徒岸测水

如上页图所示利用相似勾股形，正如术文所说：“以重差求之”．由$\triangle ABC \backsim \triangle AGE$得

$$\frac{b}{a}=\frac{x+y}{c+d}，（勾股）$$

由$\triangle ABD \backsim \triangle AGF$得

$$\frac{b}{a}=\frac{y}{c}（勾股）$$

于是，$\frac{b}{a}=\frac{x+y}{c+d}=\frac{y}{c}=\frac{(x+y)-y}{(c+d)-c}=\frac{x}{d}$（重差）

因为：b等于徒岸加人高减去目下，即

$$b=3丈+5尺-5寸=345寸$$

所以，$x=\frac{bd}{a}=\frac{(300+50-5)\times 34}{5}=2346（寸）$

答：水阔二十三丈四尺六寸．

十一、古代算学——方田与少广

《九章算术》共收有246个数学问题，分为九章．其中：

第一章“方田”：主要讲述了平面几何图形面积的计算方法．包括长方形、等腰三角形、直角梯形、等腰梯形、圆形、扇形、弓形、圆环这八种图形面积的计算方法．另外还系统地讲述了分数的四则运算法则，以及求分子分母最大公约数等方法．

第四章“少广”：已知面积、体积，反求其一边长和径长等．

古代1亩=240平方步，圆周率取3；弧田（现在为弓形）面积计算方法：“以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一．”即：

$$S_{弧田}=\frac{（弦+矢）矢}{2}$$

——刘徽《弧田术》.

注：刘徽（约公元225—295年），汉族，山东邹平县人，魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基者之一．是中国数学史上一个非常伟大的数学家，他的著作《九章算术注》和《海岛算经》，是中国最宝贵的数学遗产．刘徽思想敏捷，方法灵活，既提倡推理又主张直观．他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人．刘徽的一生是为数学刻苦探求的一生．他虽然地位低下，但人格高尚．他不是沽名钓誉的庸人，而是学而不厌的伟人，他给我们中华民族留下了宝贵的财富．

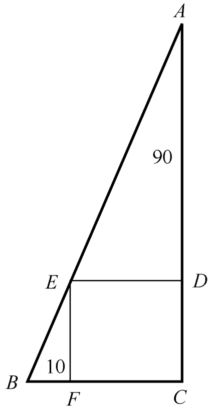
76. 方麻斜黍——凤栖梧

方种芝麻斜种黍，勾股之田，十亩无零数．
九十股差方为界，勾差十步分明许．
借问贤家如何取，多少黍田，多少芝麻亩．
算的二田无误处，智能才华算中举．

（选自《九章算法比类大全》）

释义：有一块勾股田，面积为十亩整．在此田中，方形田种芝麻，斜形（直角三角形）田种黍．股差90步，勾差为10步．请问贤家用何法，算出共有多少黍田多少芝麻田？

解析：见下页图



$\because \triangle ADE \backsim \triangle EFB$,

$\therefore \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{EF}{FB}$

即 $DE \bullet EF = AD \bullet FB$

又 $DE = EF$，故

$$DE=\sqrt{AD \bullet FB}=\sqrt{90\times 10}=30$$

所以，芝麻田面积

$$S_{芝}=DE \bullet EF = 30\times 30\div 240 = 3.75\text{（亩）}$$

黍田面积

$$\begin{aligned}S_{黍}&=\frac{1}{2}AC\times CB\div 240-S_{芝}\\&=\frac{1}{2}(AD+DC)(CF+FB)\div 240-S_{芝}\\&=\frac{1}{2}\times(90+30)(30+10)\div 240-3.75\\&=6.25\text{（亩）}\end{aligned}$$

当然可采用简单方法计算：S 黍=10−3.75=6.25（亩）

答：共有芝麻田 3.75 亩，黍田 6.25 亩.

77. 圭田截积——西江月

今有圭田一段，昔年颇记曾量.

一百八十正中长，五十四步阔享.

从尖截卖九亩，得米要纳秋粮.

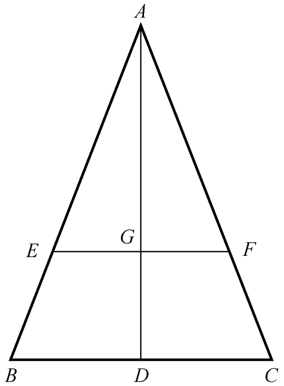
截该长阔数明彰，激恼先生一晌.

释义：今有等腰三角形（圭田）地块，等腰三角形高一百八十步，底边长五十

四步．为了纳秋粮，从尖截卖九亩，应该截长（高）、宽多少？

古代：1 亩=240 平方步

解析：见下图：



等腰三角形，高 AD=180 步，底边 BC=54 步，截积 S_{AEF}=9×240=2160 平方步，求 EF？

显然 $\Delta AEG \backsim \Delta ABD$，因此 $\frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}$，即：

$$\frac{EG}{27}=\frac{AG}{180} \qquad (1)$$

又 $EG\times AG=9\times 240=2160$

所以，

$$AG=\frac{2160}{EG} \qquad (2)$$

将式（2）代入式（1）：

$$\frac{EG}{27}=\frac{2160}{180\times EG} \qquad (3)$$

由（3）得：

$$EG=\sqrt{\frac{2160\times 27}{180}}=18$$

所以，$EF=2\times 18=36$（步）

答：底边 36 步．

78．今有直田

今有直田不知亩，长阔相和十七步．

平不及长廿五尺，请问田该多少亩？

（选自《增删算法统宗》）

释义：今有长方形的土地，不知到面积是多少亩．只知道长加上宽是十七步，宽比长少 25 尺，问该块田有多少亩？

注：这道题关键是计量单位问题．古代测量田地的方法，积二百四十步为一亩，1 亩=10 分=100 厘，1 步=5 尺．

阔：宽广

平：水平

解析：设宽为 x 尺，则长为 $(x+25)$ 尺，于是有：

$$x+(x+25)=17\times 5=85$$

解得宽：$x=30$（尺）=6 步

∴长：17−6=11（步）

面积：11×6=66（平方步）

66÷240=0.275（亩）

答：该块田有二分七厘半，计六十六（平方）步．

79．直田长阔

今有直田用较除，一百二十步无余．

长阔相和该一百，问公三事几何知．

释义：今有直田一百二十步，用长阔差除正好除尽，长加阔等于一百步，求长、阔及长阔差（即三事）．

解析：长阔差：120−100=20（步）

阔：（100−20）÷2=40（步）

长：40+20=60（步）

答：长、阔及长阔差分别为 60 步，40 步，20 步．

80．大小方田

大小方田积共有，六千五百二十九．

方面只差一十七，诸人会者先开口．

释义：大小方田面积和六千五百二十九平方步．大小方田边长相差一十七步．问大小方田的边长是多少？

解析：设小方田边长为 x，则大方田边长为 $x+17$，依题意：

$$x^2+(x+17)^2=6529$$

整理得：$x^2+17x-3120=0$

解得：小方田边长为 x=48（步），大方田边长为 $x+17$=48+17=65（步）

答：小方田边长为 48 步，大方田边长为 65 步.

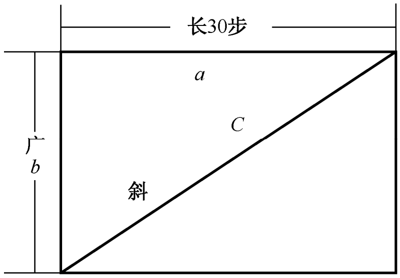
81. 丈量田地

昨日丈量田地回，记得田长三十步.

广斜之步共五十，不知几亩几零数.

注：广，阔也（宽）.

释义：昨日丈量田地回来，记得田长三十步. 广（阔）加斜等于 50 步，求方田面积.



解析：$\because b+c=50$，$a^2+b^2=c^2$.

$\therefore b+\sqrt{30^2+b^2}=50$

整理得：$100b=1600$

解得：$b=16$（步）

方田面积：（30×16）÷240=2（亩）

答：二亩无零.

82. 正长端的

三十八万四千步，正长端的无差误.

六丝二忽五微阔，不知共该多少亩.

释义：长三十八万四千步. 宽六丝二忽五微步. 求亩数.

解析：此是直田长阔（宽）问积．六丝二忽五微阔，应理解为 0.000 625 步．所以，384 000×0.000 625=240（平方步）

答：共一亩．

有趣的是：一个人一天平均走两万步，一年要走七百万步．人活七十岁的话，加起来要走五亿步，即三十八万四千千米．这个数字，正好是地球到月球的距离．

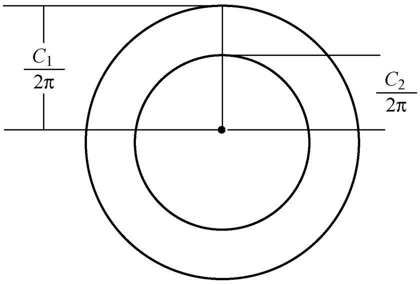
83．一段环田

一段环田径不知，二周相并最幽微．

皆知一亩无零积，一百六十不差池．

三般可以见端的，只要闲家仔细推．

注：1 步=3 尺．



释义：一段环田环宽不知道是多少，只知道大、小圆周的和是 160 步，环面积是一亩，求环宽、外周、内周．

解析：设大、小圆周长分别为 C_1 和，C_2．依题意：

并大、小圆周长：

$$C_1 + C_2 = 160 \qquad (1)$$

圆环面积：

$$\pi(R^2 - r^2) = \pi\left[\left(\frac{C_1}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{C_2}{2\pi}\right)^2\right] = 240$$

整理得：

$$C_1^2 - C_2^2 = 2880 \qquad (2)$$

由式（1）解得 $C_1 = 160 - C_2$，代入式（2）得：

$$(160 - C_2)^2 - C_2^2 = 2880$$

解得：$C_2 = 71$（步），$C_1 = 160 - 71 = 89$（步），径（环宽）=（89−71）÷6=3（步）．

答：径 3 步，外周 89 步，内周 71 步．

84. 环田久虑——凤栖梧

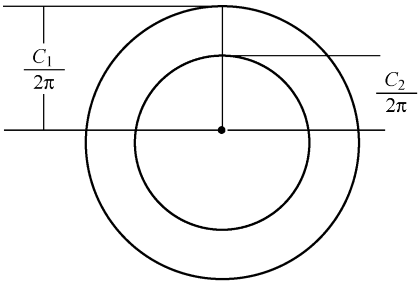
一段环田余久虑，众说分明亦有谁人悟.

忘了二周并经步，人道二周不及为零处.

七十有余单二步，三事通知，答日分明住.

五亩二分无零数，玄机奥妙堪思慕.

释义：有一段环田我长时间地思虑，大家都说很清楚，可是到底有谁能领会呢？忘了环田外周、内周的长和半径是多少步，人说外周、内周之长不相等，相差七十二步. 如果内周、外周长及半径都知道，那么可以回答说：分明占地五亩二分没有零头. 懂得这深奥玄妙道理的人，真叫人思念羡慕啊.



**解析**：如图所示设大、小圆周长分别为 C_1 和 C_2. 依题意：

并大、小圆周长：

$$C_1 - C_2 = 72 \tag{1}$$

圆环面积：

$$\pi（R^2 - r^2）= \pi\left[\left(\frac{C_1}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{C_2}{2\pi}\right)^2\right] = 5.2\times 240 = 1248$$

整理得：

$$C_1^2 - C_2^2 = 14\,976 \tag{2}$$

由式（1）解得 $C_1 = 72 + C_2$，代入式（2）得：

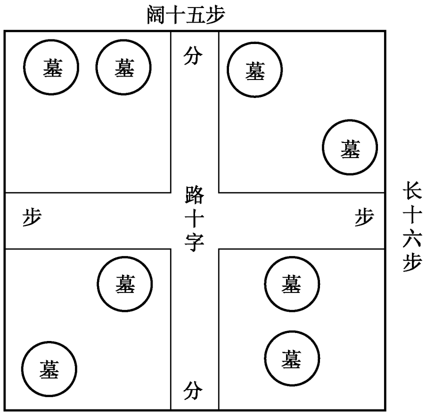
$$(72 + C_2)^2 - {C_2}^2 = 14\,976$$

解得：$C_2 = 140 - 72 = 68$（步），$C_1 = 140$（步），径（环宽）=（140−68）÷6=12（步）.

答：径 12 步，外周 140 步，内周 68 步.

85. 田中路墓——双捣练

长十六，阔十五，
不多不少恰一亩.
内有八个古坟墓，
更有一条十字路，
每个墓周六步，
十字路阔一步，
每亩折银二两五，
除了墓、除了路，
问君该剩多少数？



释义：一块方田，长 16 步，宽 15 步，面积正好 1 亩. 田内有八个古坟墓，每个墓周长 6 步，还有宽一步的十字路. 每亩地折银二两五，不含墓和路，剩地折合银多少两？

解析：$S_{总}=15\times16=180$（平方步）

$8墓=8\times\pi\times r=8\times\pi\times\left(\frac{6}{2\pi}\right)^2=24$（平方步）

路$=[15+(16-1)]\times1=30$（平方步）

路墓占地：（24+30）÷240=0.225（亩）

剩地：1−0.225=0.775（亩）

该银：2.5×0.775=1.9375（两）

答：路墓占地 2 分 2 厘五毫，内八墓计 24 平方步，路 30 步，剩地七分七厘五毫. 该银 1 两 9 钱三分七厘五毫.

86. 长阔争半

直田七亩半，忘了长和短.
记得立契时，长阔争一半.
今特问高明，此法如何算?

释义：长方形地块面积 7.5 亩，长方形的长是宽的 2 倍，求长方形长和宽.

解析：7.5×240=1800

设直田宽为 x，则直田长为 $2x$，依题意:

$$x \times 2x = 1800$$

即 $x^2 = 900$， $x = \sqrt{900} = 30$（步）

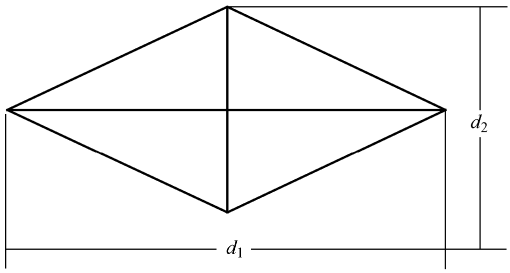
$$2 \times 30 = 60 \text{（步）}$$

答：长 60 步，宽 30 步.

87. 菱田其积

菱田其积一千二，又零二十有四步.
阔不及长三十二，要见阔长多少数.

释义：菱形地块其面积为 1224 平方步，长比宽多 32 步，求长和宽.



菱田长与阔

解析：设菱田阔为 x，依菱形面积公式：$S_{菱田} = \dfrac{d_1 d_2}{2} = \dfrac{x(x+32)}{2}$，所以

$$x(x+32) = 1224 \times 2 = 2448$$

分解因式有:

$$(x-36)(x+68) = 0$$

解得正根 $x = 36$

所以菱田阔 36 步，长 68（36+32）步.

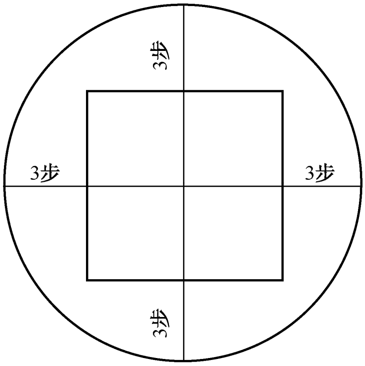
答：长 68 步，阔 36 步.

88. 圆田方池——西江月

今有圆田一块，中间有个方池.
量田地待耕犁，恰好三分在记.
池面至周有数，每边三步无疑.
欲求内方圆径，有谁算中第一.

（选自《增删算法统宗》）

释义：今有圆形田地一块，在中间有个正方形的水池. 测量一下可耕种的土地，恰好是三分，方池的四面至圆周的距离恰好是三步，求圆田的直径和方池的边长.



注：圆田，即圆形地块. 1 亩=240 平方步，一亩=10 分，3 分=72 平方步，一步=5 尺.

解析：三分地相当于

$240\times0.3 = 72$（平方步）

设正方形边长为 x 步，则圆的半径为：

$$\left(3+\frac{x}{2}\right)\text{步}$$

依题意得方程：

$$3\times\left(3+\frac{x}{2}\right)^2 - x^2 = 72$$

整理得：

$$x^2 - 36x + 180 = 0$$

解得：

$$x_1 = 6\text{，}\quad x_2 = 30$$

当 $x=30$ 时，正方形的对角线长大于圆的直径，不合题意，舍去．故圆田的直径为：

$x+6=6+6=12$（步）．

答：圆田的直径为 12 步，内方池边长为 6 步．

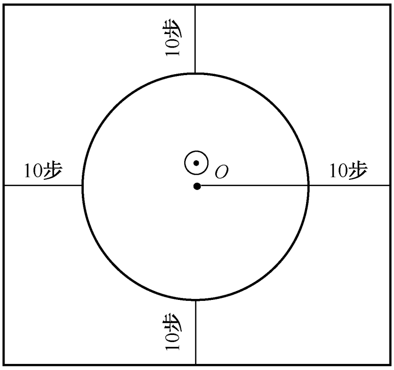
89．方田圆池——西江月

今有方田一块，中间有个圆池．
步量田可耕犁，十亩无零在记．
方至池边有数，每边十步无疑．
外方池径若知，到处扬名说你．

（选自《算学宝鉴》）

释义：今有正方形田地一块，在中间有个圆形水池．测量一下可耕种的土地，恰好是十亩整，方面至圆池边的距离，每边是十步，如果能算得外方边长及内池径．就到处传扬你的美名．

注："方田"指正方形的田地，1 亩=240 平方步，1 步=5 尺，古时 π 取 3.



解析：设圆 O 的半径为 x 步，则正方形的边长为 $2(x+10)$ 步，又因为 10 亩=2400 平方步，依题意知：

$$\left[2(x+10)\right]^2-3x^2=2400$$

整理得：$x^2+80x-2000=0$

解得正根：$x=20$，所以圆的直径为 40（步），边长为 40+20=60（步）．

答：边长 60 步，圆直径 40 步．

90. 圆池在内

方田一十五亩，及时人去耕犁.

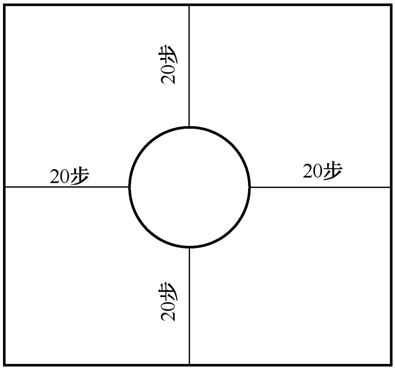
圆池在内甚稀奇，圆径不知怎记.

方至池边有数，每边 20 无疑.

外方圆径若知，细演天元如积.

注：天元术是金、元数学家创造的设未知数列方程的方法.

解析：见下图



设面方（即正方形边长）为 x，依题意面方为：

$x=\sqrt{240\times 15}=60$（步）

圆径：$60-20-20=20$（步）

答：面方 60 步，圆径 20 步.

91. 圆田直河

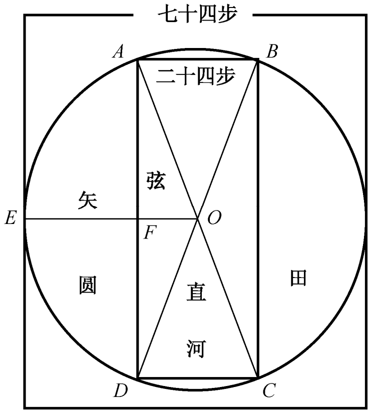
今有圆田一所，不知顷亩端的.

直河一道正中穿，圆分弧矢两段.

通径七十四步，二十四步河宽.

除河见在几多田，水占如何得见.

释义：今有一段圆田，不知面积是多少顷亩．有一条直河从正中穿过．将圆田分为两段．已知圆田直径为 74 步，河宽为 24 步，问除去河流以外，见在田面积是多少？水占田面积如何求得？（1 亩=240 平方步，π 取 3）



解析：依据圆面积公式求得圆田总面积：

$$S_{总}=\pi \cdot r^2=3\times\left(\frac{74}{2}\right)^2=4107\text{（平方步）}$$

弦为 $AD=\sqrt{37^2-24^2}=70$（步）

半弦 $FD=70\div 2=35$（步）

弧的矢为 $EF=EO-FO=37-\sqrt{37^2-35^2}=25$（步）

一段弧田面积为

$$S_{弧}=\frac{(70+25)\times 25}{2}=1187.5\text{（平方步）}$$

二段弧田面积为

$$2S_{弧}=1187.5\times 2=2375$$

折算为 2375÷240=9.896（亩）

水占田面积（4107−2375）÷240=7.217（亩）

答：见在田 9.896 亩，水占田 7.217 亩.

弧田（hutian）：即圆弓形．最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章．“弧田术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一”．也就是若设弦长为 b，矢长为 h，则圆弓形的面积为：

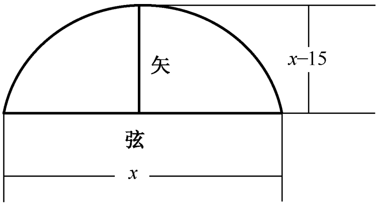
$$S_{弧田}=\frac{（弦+矢）矢}{2}$$

显然，这是一个近似公式，即将其看成是一个以矢、弦分别为上、下底，以矢为高的等腰梯形的面积.

92. 弧矢一亩

弧矢一亩积一段，更加九十七步半.

矢不及弦十五步，弦矢各长怎的算.



**解析**：如上图，设弦长为 x，则矢长为 $(x-15)$，根据弧田面积公式：

$$S_{弧田}=\frac{（弦+矢）矢}{2}=\frac{[x+(x-15)](x-15)}{2}=\frac{(2x-15)\ (x-15)}{2}=\frac{2x^2-45x+225}{2}$$

$S_{弧田}=240+97.5=337.5$

$\therefore 2x^2-45x+225=337.5\times 2=675$

整理得 $2x^2-45x-450=0$

解得正根，即弦长 $x=30$（步），矢长（30−15）=15（步）

答：弦 30 步，矢 15 步.

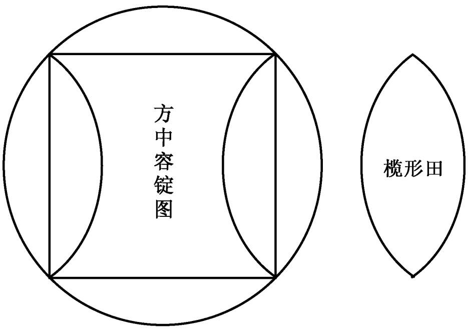
93. 锭田一段

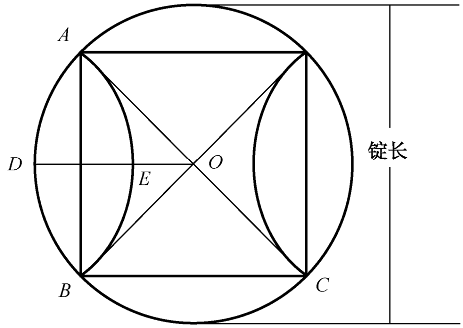
假如圆田径十四步，计积一百四十七步.

内容锭田一段．榄形田二段.

形长十步．阔四步．问各该积若干.

释义：圆田地块直径十四步（也是锭长），面积为一百四十七步．圆内含锭田一块；榄形田二块，榄形田长十步、宽四步．问锭田、两榄形田面积是多少？





解析：弦 AB=10 步，矢=4÷2=2 步，根据弧田面积公式:

$$S_{榄田}=4S_{弧田}\approx 4\times\frac{（弦+矢）矢}{2}=4\times\frac{(10+2)\times 2}{2}=4\times 12=48\text{（平方步）}$$

$$S_{锭田}=10\times 10=100\text{（平方步）}$$

答：锭田积 100 平方步，两榄形积约 48 平方步.

十二、悖论趣题

悖论是一个逻辑学的名词，其定义可以这样表述：由一个被承认是真的命题为前提，设为 B，进行正确的逻辑推理后，得出一个与前提互为矛盾命题的结论非 B；反之，以非 B 为前提，亦可推得 B．那么命题 B 就是一个悖论．当然非 B 也是一个悖论．

它具有以下的特征：

① 悖论是一个命题；

② 是被承认作为前提的一个真命题；

③ 以上述真命题为前提，进行正确的逻辑推理；

④ 结论是一个与前提互相矛盾的命题（理所当然也应该承认是一个真命题）．

94．谎言者悖论

公元前六世纪，哲学家克利特人艾皮米尼地斯（Epimenides）："所有克利特人都说谎，他们中间的一个诗人这么说．"这就是这个著名悖论的来源．

这类悖论的一个标准形式是：如果事件 A 发生，则推导出非 A，非 A 发生则推导出 A，这是一个自相矛盾的无限逻辑循环．拓扑学中的单面体是一个形象的表达．

解析：谎言者悖论最简单地勾画出了他发现的那个矛盾："那个说谎的人说：'不论我说什么都是假的'．事实上，这就是他所说的一句话，但是这句话是指他所说的话的总体．只是把这句话包括在那个总体之中的时候才产生一个悖论．"

95．理发师悖论

在萨维尔村，理发师挂出一块招牌："我只给村里所有不给自己理发的人理发．"有人问他："你给不给自己理发？"理发师顿时无言以对．这是一个矛盾推理．如果理发师不给自己理发，他就属于招牌上的那一类人，有言在先，他应该给自己理发．反之，如果这个理发师给他自己理发，根据招牌所言，他只给村中不给自己理发的人理发，他不能给自己理发．因此，无论这个理发师怎么回答，都不能排除内

在的矛盾．这个悖论是罗素在 1902 年提出来的，所以又叫罗素悖论，这是集合论悖论的通俗、有故事情节的表使因此建筑在集合论基础上的整个数学就如同建筑在沙滩上的大厦一样，其牢固性令人极为担忧，数学基础陷入第三次危机之中．

解析：这个“悖论”的问题就出在这里了：“不给自己刮脸的人”的界定标准是什么？

① 界定标准是：如果村里的任一村民 x，从出生到死亡都从来没有自己给自己刮过脸，即一生中都没有“自己给自己刮脸”的“劣迹”，那么，x 是“不给自己刮脸的人”．

② 界定标准是：如果村里的任一村民 x，在接受该理发师刮脸服务之前从来没有自己给自己刮过脸，即在接受该理发师刮脸服务之前没有“自己给自己刮脸”的“劣迹”，那么，x 是“不给自己刮脸的人”．

很明显，界定标准①是不可能的，因为这个标准是不允许给活人刮脸的．

唯一合理的界定标准为②．

由界定标准②可知，理发师或者符合他制定的规则，或者不符合，二者必居其一，不存在悖论．

96．阿基里斯悖论

阿基里斯（Achilles）是古希腊神话中善跑的英雄．在他和乌龟的竞赛中，乌龟在前面跑，他在后面追，但他不可能追上乌龟．因为在竞赛中，追者首先必须到达被追者的出发点，当阿基里斯到达乌龟在某时所处的位置时，乌龟已向前移动一些；阿基里斯再到达乌龟的那个位置时，乌龟又往前跑了一段；……因此，无论阿基里斯到达乌龟曾处的哪个位置，乌龟都会在他前面．所以，无论阿基里斯跑得多快，他永远追不上乌龟．

解析：芝诺的论证是这样的：你若想追上乌龟，你必须首先到达乌龟开始跑的位置，但当你到达乌龟开始跑的位置时，乌龟在这段时间里已经跑到前面去了，当你再想去追乌龟时，你面临同样的问题，即你仍必须首先要跑到乌龟此刻的位置，而等你跑到了乌龟又向前移动了．好，虽然你比乌龟跑得快，但你也只能按上述过程逐渐逼近乌龟，这样的过程将无限次地出现，而在每一阶段乌龟总在你前头．由于有限的你无法完成这无限个阶段，于是你永远也追不上乌龟．

97. 蚂蚁与橡皮绳

一只蚂蚁沿着一条长 100 米的橡皮绳以每秒 1 厘米的速度匀速由一端向另一端爬行. 每过 1 秒，橡皮绳就拉长 100 米，比如 10 秒后，橡皮绳就伸长为 1100 米了. 当然，这个问题是纯数学化的，即假定橡皮绳可任意拉长，并且绳子拉伸是均匀的. 蚂蚁也会不知疲倦地一直往前爬，现在要问，如此下去，蚂蚁最终能否爬到橡皮绳的另一端？

也许你会认为，蚂蚁爬行的那点可怜的路程远远赶不上橡皮绳成万倍的不断拉长，只怕是离终点越来越远吧！但是千真万确，蚂蚁爬到了终点，奇怪吗？

解析：在第一秒过后，蚂蚁爬行了 1cm，然后它身后的 1cm 绳子立即瞬间按比例变化至 2cm，蚂蚁继续向前爬，注意到，它此时继续向前爬即使爬行的距离再少得可怜，即使绳子会继续在下一秒疯狂继续拉伸，但依然等同它在微步前进着，因为绳子只是按比例拉伸，而不是一端固定地向一端延长，是两头都延长的哦. 如固定一端地延长那蚂蚁还是歇歇吧，别想追了. 在下一秒，蚂蚁继续向前爬行 1 厘米，当绳子拉伸至 300 米的时候它身后的绳子长度就从 3 厘米按比例变化至 4.5 厘米. 以此类推……即:

$$\frac{1}{10\,000}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\right)=1$$

这个算式用微积分角度来看，始终会有加起来等于 1 的时候，即蚂蚁是可以到达终点的.

再通俗点理解就是蚂蚁每爬过的（也可以理解为占领）的领土都不会因为绳子的扩大而变得缩水，因为那个是均匀拉伸，所以在保持着占领的领土不丢的情况下，虽然爬行的速度因为绳子的扩大而减少了，但始终是每一秒内都有些许的前进，也即每一秒都有新领土占领. 依次类推，它命够长，所以最终还是会爬到终点的.

答：蚂蚁能爬到终点.

98. 意想不到的老虎

公主要和迈克结婚，国王提出一个条件：

“我亲爱的，如果迈克打死这五个门后藏着的一只老虎，你就可以和他结婚. 迈克必须顺次序开门，从 1 号门开始. 他事先不知道哪个房间里有老虎，只有开了那扇门才知道. 这只老虎的出现将是料想不到的.

迈克看着这些门，对自己说道：

“如果我打开了四个空房间的门，我就会知道老虎在第五个房间．可是，国王说我不能事先知道它在哪里，所以老虎不可能在第五个房间．”

“五被排除了，所以老虎必然在前四个房间内．同样的推理，老虎也不会在最后一个房间——第四间内．”

按同样的理由推下去，迈克证明老虎不能在第三、第二和第一个房间．迈克十分快乐，他满怀信心地去看门．使他惊骇的是，老虎从第二个房间跳了出来．

迈克的推理并没有错，但他失败了．老虎的出现完全出乎意料，表明国王遵守了他的诺言．也许，迈克进行推理的本身就与国王关于老虎“料想不到”的条件发生了矛盾．迄今为止，逻辑学家对于迈克究竟错在哪里还未得到一致意见．

十三、逻 辑 趣 题

逻辑推理就是，当人类听到别人陈述的事情时，大脑开始历经复杂的信号处理及过滤，并将信息元素（Information element）经过神经元（wNeuron）迅速地触发并收集相关信息，这个过程便是超感知能力．之后由经验累积学习到的语言基础进行语言的处理及判断，找出“正确”（假设在一个相对统一概念的既定世界观范围内）的事件逻辑．

99．强盗的难题

强盗抢劫了一个商人，将他捆在树上准备杀掉．为了戏弄这个商人，强盗头子对他说：“你说我会不会杀掉你，如果说对了，我就放了你，决不反悔！如果说错了，我就杀掉你．”

聪明的商人仔细一想，便说：“你会杀掉我的．”于是强盗头子发呆了，“哎呀，我怎么办呢，如果我把你杀了，你就是说对了，那应该放你；如果把你放了，你就说错了，应该杀掉才是”．强盗头子想不到自己被难住了，心想商人也很聪明，只好将他放了．

解析：这是古希腊哲学家喜欢讲的一个故事．如果我们仔细想一想，就会明白那个商人是多么机智．他对强盗说：“你会杀掉我的．”这样，无论强盗怎么做，都必定与许诺相矛盾．

如果不是这样，假如他说：“你会放了我的．”这样，强盗就可以说：“不！我会杀掉你的，你说错了，应该杀掉．”商人就难逃一死了．

下面这个例子也是有趣的．有个虔诚的教徒，他在演说中口口声声说上帝是无所不能的，什么事都能做得到．一位过路人问了一句话，使他顿时张口结舌．

这句话是：“上帝能创造一块他自己也举不起来的大石头吗？”请你想一想，这个教徒为什么会哑口无言？

100．鹿死谁手

古代有一个皇帝，有一天命令姓赵、钱、孙、李、周、吴、郑、王的八员大将

陪同他外出打猎．经过一番追逐，有一员大将的一支箭射中了一只鹿．但是，是哪一员大将射中的，开始谁也不清楚．这时候，皇帝叫大家先不要去看箭上刻写的姓氏，而要大家先逐一猜究竟是谁射中的．于是，八员大将众说纷坛．

赵：“或者是王将军射中的，或者是吴将军射中的．”

钱：“如果这支箭正好射中鹿的头，那么肯定是我射中的．”

孙：“我可以断定是郑将军射中的．”

李：“即使这支箭正好射中鹿的头，也不可能是钱将军射中的．”

周：“赵将军猜错了．”

吴：“不会是我射中的，也不是王将军射中的．”

郑：“不是孙将军射中的．”

王：“赵将军没有猜错．”

猜完之后，皇帝命令赵将军把鹿身上的箭拔出来验看；证实八员大将中有三人猜对了．

请大家判断一下：鹿是谁射死的？又问：假如有五个人猜对，那么鹿又是谁射死的？

如果有三员大将猜对，那么，鹿是被孙将军射中的．如果有五员大将猜对，那么，鹿是被郑将军射中的．

这个题目，可以用负判断的知识去求得解答．

解析：八员大将所说的八句话，实际上表达了八个判断．其中，赵将军的判断与吴将军的判断是互相否定，即互为负判断的．赵将军的判断是个具有“或者 P，或者 q”结构的选言判断；而吴将军的判断是一个具有“非 p，而且非 q”结构的联言判断，而这个判断恰好是“或者 p，或者 q”判断的负判断．

我们知道，原判断与其负判断的真假值是正好相反的．如果我们用 p 表示原判断，用非 P 表示它的负判断，那么 P 与非 P 的真假关系，可用下表表示：

p	非 p
真	假
假	真

从表中我们可以看到，判断 p 和它的负判断非 p，是既不能同真，也不能同假的．

既然这样，赵将军的判断与吴将军的判断必然是一真一假．

同样，钱将军的判断和李将军的判断，也是互为负判断的．钱将军的判断是一个具有“如果 p，那么 q”结构的充分条件假言判断；而李将军的判断是一个具有“p，而且非 q”结构的联言判断，而且这个判断正好是钱将军的判断的负判断．所以，钱、李两位将军的判断，也一定是一真一假．

周将军与王将军的判断，分别为“这个 s 是 p”和“这个 s 不是 p”，二者也互为负判断，因此也是一真一假.

这就是说，如果八员大将中有三人猜对，那么，猜对的三员大将必定在上述赵、吴，钱、李，周、王这三对人之中，余下的二人（孙将军和郑将军）都猜错了．既然孙将军猜错了，那就是说，鹿不是被郑将军射中的；而郑将军猜错了，则说明鹿是被孙将军射中的．既然鹿是被孙将军射中的，所以，在前述三对将军中，猜中者实为：吴、李、周三位将军.

其次，我们如果假定八员大将中有五员大将猜对了，那么，除了上述六个将军中有三个猜对之外，孙将军和郑将军也猜对了．既然孙将军猜对了，那就是说鹿是郑将军射中的．这样，猜对者应为孙、郑、吴、李、周五位将军.

101．谁是国际间谍

在一列国际列车的车厢内，有 A、B、C、D 四名不同国籍的旅客，他们身穿不同颜色的衣服，坐在同一张桌子的两对面，其中两人靠窗坐，另两人靠过道坐．已知蓝色大衣的人是国际间谍，又知道：

（1）英国旅客坐在 B 先生的左侧；

（2）A 先生穿褐色大衣；

（3）穿黑色大衣者坐在德国旅客的右侧；

（4）D 先生的对面坐着美国旅客；

（5）俄国旅客身穿灰色大衣；

（6）英国旅客把头转向左边，望着窗外.

请说出谁是穿蓝色大衣的国际间谍？

解析：以第（6）个条件为解题突破口，可见英国人坐在靠窗一边，由（1）可知 B 先生是挨过道坐的.

由条件（3）可以推出德国旅客坐在 B 先生对面靠过道一边，而穿黑色大衣者必坐在英国人对面，也是靠窗坐的.

条件（4）明确指出 D 先生对面坐着美国人，由于四人中英、德两国籍的旅客的坐位已经明确，所以他们对面的旅客不可能是 D 先生，而 D 先生只可能是英、德两国籍中的一个．这一步推理是关键性的．再下去可用试探法．设德国人是 D 先生，则 B 先生将是美国人，于是坐在 D 先生旁边的黑色大衣的人便是俄国人，但这与条件（5）相抵触，由此推知 D 先生不可能是德国人，应是英国人，从而得知英国人对面坐的是美国人，而英国人旁边坐的是俄国人．从条件（2）得知，A 先生是穿褐色大衣的，所以他只能是德国的旅客，剩下的美国人就是 C 先生.

四位旅客所坐位置如图所示：

窗　口

英国旅客 D　C 美国旅客

穿蓝色大衣　穿黑色大衣

俄国旅客 B　A 德国旅客

穿灰色大衣　穿褐色大衣

现在，别无选择余地，穿蓝色大衣的非英国人莫属了．因此他就是国际间谍．

102. 律师们的供词

艾伯特、巴尼和柯蒂斯三人，由于德怀特被杀而受到传讯．犯罪现场的证据表明，可能有一名律师参与了对德怀特的谋杀．

这三个人中肯定有一人是谋杀者，每一名可疑对象所做的两条供词是：

艾伯特：

（1）我不是律师．

（2）我没有谋杀德怀特．

巴尼：

（3）我是个律师．

（4）但是我没有杀害德怀特．

柯蒂斯：

（5）我不是律师．

（6）有一个律师杀害了德怀特．

警察组最后发现：

I.上述六条供词中只有两条是实话．

II.三个可疑对象中只有一个不是律师．

是谁杀害了德怀特？

（提示：判定（2）和（4）这两条供词都是实话，还是其中只有一条是实话．）

解析：供词（2）和（4）之中至少有一条是实话．

如果（2）和（4）都是实话，那就是柯蒂斯杀了德怀特；这样根据{I.上述六条供词中只有两条是实话}，（5）和（6）都是假话．但如果是柯蒂斯杀了德怀特，（5）和（6）就不可能都是假话．因此，柯蒂斯并没有杀害德怀德．

于是，（2）和（4）中只有一条是实话．

根据{II.三个可疑对象中只有一个不是律师}，（1）、（3）和（5）中不可能只有一条是实话．而根据{I.上述六条供词中只有两条是实话}，现在（1）、（3）和（5）

都是假话，只有（6）是另外的一条真实供词了.

由于（6）是实话，所以确有一个律师杀了德怀特. 还由于：根据前面的推理，柯蒂斯没有杀害德怀特.

（3）是假话，即巴尼不是律师.

（1）是假话，即艾伯特是律师.

从而（4）是实话，（2）是假话，

结论：是艾伯特杀害了德怀特.

103. 林肯破案

美国总统林肯在 1860 年上任后不久，受理了这样一桩奇怪的案件：被告的罪名是谋财害命，但是在审讯中，被告口口声声说受了冤枉，而证人却一口咬定他目睹被告犯了罪.

证词是这样的：10 月 18 日晚上 11 时，我站在一个草堆后面，亲眼看见被告在离草堆西边 30 米处的大树旁作案. 因当时月光正照在被告脸上，所以我看清了作案的凶手.

听起来证人的话颇有道理，但林肯却根据这一证词判定证人犯了诬告罪，而将被告无罪释放了. 你能说出林肯作出这样判决的科学根据吗？想想看，你知道答案么？

解析：林肯做出这样判决的科学根据是：那一年阳历的 10 月 18 日是上弦月，11 点钟时月亮已经西沉，不会有月光. 即使证人记错了时间，把作案时间推前，月亮还在西边，月光从西边照射过来，如果凶手面向西，藏在树东边草堆后面的证人是根本无法看到其面容的；倘若作案者面向证人，月光照在作案人后脑勺上，证人又如何能够看清凶手？

104. 巧断作案时间

米勒在他的卧室内被凶手枪杀了. 警方到现场时尸体已冷，不能以尸体判断作案时间. 侦探发现，卧室墙上的挂钟中心有一弹孔，子弹穿过机芯造成了挂钟停转. 侦探松了口气，因为作案时间已“记录在案”. 但经仔细观察，侦探发现挂钟的两个指针成一条直线，一个指“3”，一个指“9”. 侦探认为钟是无论如何也走不成这种样子的. 显然，凶手在作案后有意做了假象，但是他慌乱中没考虑到时针和分针的配合规律.

如果凶手在射中挂钟时，两个指针正巧也是在一条直线上，且指向相反，你能否帮助侦探判断作案时间？

解析：在 12 点钟过后，挂钟的两个指针第一次是在 12 点 32 分处于一条直线上，且指向相反．以后总是每经过 1 小时 5 分重复一次．挂钟的秒针位置表明，钟是在 10 点 21 分 49 秒被射中的．

105．岔路问路

一位旅游者徒步去纽约旅行，走到一个岔路口，发现通往纽约的路标倒了，这时走来两个人，旅游者见两人与众不同的衣着打扮，就知道他们是当地人．这儿的居民，一部分总是讲实话，另一部分人总是讲谎话，一部分人总是穿白色衣服，而另一部分人总是穿黑色衣服．旅游者对上述情况早有耳闻，但并不知道穿什么颜色衣服的人讲实话．既然两个人所穿衣服的颜色不同，旅游者当然知道，即使问其中某一个人哪一条路是通往纽约的，也无法知道回答的是实话还是谎话．经过一番思考，旅游者向其中一个人提了一个非常简单的问题．当这个人回答出所提问题之后，旅游者立刻就知道，哪一条是通往纽约的路了．

解析：为了简便起见，把两个人简称为甲、乙．旅游者向甲提出如下的问题："假如我问乙，左边的路是不是去纽约的路回答是肯定的吗？"

如果左边的路确实是通往纽约的话，而甲是个说谎者，旅游者得到的回答是"否定"的．但是，如果甲是讲实话的人，该问题的答案也将会是"否定"的．因为乙是个说谎者，乙肯定会说"不是"．所以，"否定"回答将表明旅游者所指的路就是通往纽约的路．

若再问甲时，旅游者所指左边的路不是通往纽约的路，那么，答案将是"肯定"的．如果甲是一个讲实话的人，甲一定会说"是"，乙的答案是"肯定"的，因为乙是个说谎者．如果旅游者得到的答案是"肯定"的，那就说明旅游者说的不是通往纽约的路，那么，另一条路就是通往纽约的路．

106．真话假话

有一天，某国首都的一家珠宝店，被盗贼窃走一块价值 5000 美元的钻石．经过几个月的侦破，查明作案的肯定是 A，B，C，D 这四个人当中的某一个．于是，这四个人被作为重大嫌疑对象而拘捕入狱，接受审讯．四个人的供词中有一些互相矛

盾的内容：

A．不是我作案的．

B．D 就是罪犯．

C．B 是盗窃这块钻石的罪犯．

D．B 有意诬陷我．

因为几个人供述的内容互相矛盾，谁是真正的罪犯还无法确认．现在，我们假定四个人当中只有一个说了真话．那么请问：罪犯是谁？

解析：罪犯是 A，因为 B 和 D 的话是互相矛盾的，B 和 D 的话不能同真，不能同假，因而必有一真，必有一假．从这里可得知，A 和 C 都是说假话．从 A 说“不是我作案的”这句话假，可推出罪犯是 A．

107．谁在说谎

小明去钓鱼，但却不知道去鱼塘的路怎么走，他在路上遇到张三，李四和王五三个人，于是便向他们问路，

谁知三个人各有各的说法，而且，他们又都叮嘱小明不要相信别人的话．

张三说：李四在说谎；

李四说：王五在说谎；

王五说：张三、李四都在说谎！

请问三个人中到底谁在说真话，谁在说假话呢？

解析：可以用假设法来解决本题，即对给定的问题，先做一个或一些假设，

然后根据已给的条件进行分析如果出现与题目给的条件有矛盾的情况，说明假设错误，可再做另一个或另一些假设．在科学史上，“假设”曾起了极大的作用．

对于本题可以用以下三个假设：

（1）假设张三说的是真话：李四说的是谎话，即事实是王五说的是实话，而王五又说张三说的是谎话，推论和假设矛盾，假设不成立．

（2）假设李四说的是真话：由于假设李四说的是真话，即事实张三说的是假话．那么王五就是在撒谎，即张三李四至多只有一个在撒谎，条件和假设符合，假设成立．

（3）假设王五说的是实话：可知张三就是在撒谎，即事实是李四说的是实话，而假设条件为张三和李四都在撒谎，因此推论和假设矛盾，假设不成立．

答：李四说的是真话．

108. 八十大寿

斯威夫特是一个快乐的老头，自他 30 岁与漂亮的玛丽结婚后，夫妻俩相濡以沫、举案齐眉，生活十分美满幸福．在斯威夫特寿登八十之时，恰好又是他和玛丽金婚纪念日（西方把结婚满五十周年的称为金婚），儿孙绕膝的斯威夫特夫妇心里充满了甜蜜，分外高兴．为了欢度这个具有特殊纪念意义的节日，大家一致决定隆重庆祝．家庭成员各司其职，分头准备，其中斯威夫特的大孙子汤姆的任务就是去超市购买宴会所用的火鸡、鸭与鹅，在此过程中，有趣的问题发生了．

汤姆带的钱共有 10 英镑 11 先令（1 英镑=20 先令），当他买了这三种家禽共 23 只后，这笔钱刚好不多不少用完，而且每种家禽所购买的只数正好是每只家禽的售价数（以先令为单位），真是应了“无巧不成书”的老话．更有意思的是，按当地的习惯：同种家禽不论大小如何，均以同样价格出售．而且若以先令来计算的话，每种家禽的售价恰巧都是个整数．当然，三种家禽中火鸡的价格最贵，鸭其次，鹅最便宜．你知道火鸡、鸭、鹅每只的售价各是多少先令么？

解析：设鸡、鸭、鹅的只数分别为 x、y 和 z，x、y 和 z 为正整数，且 $x > y > z$

依题意：

$$\begin{cases} x+y+z=23 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=211 & (2) \end{cases}$$

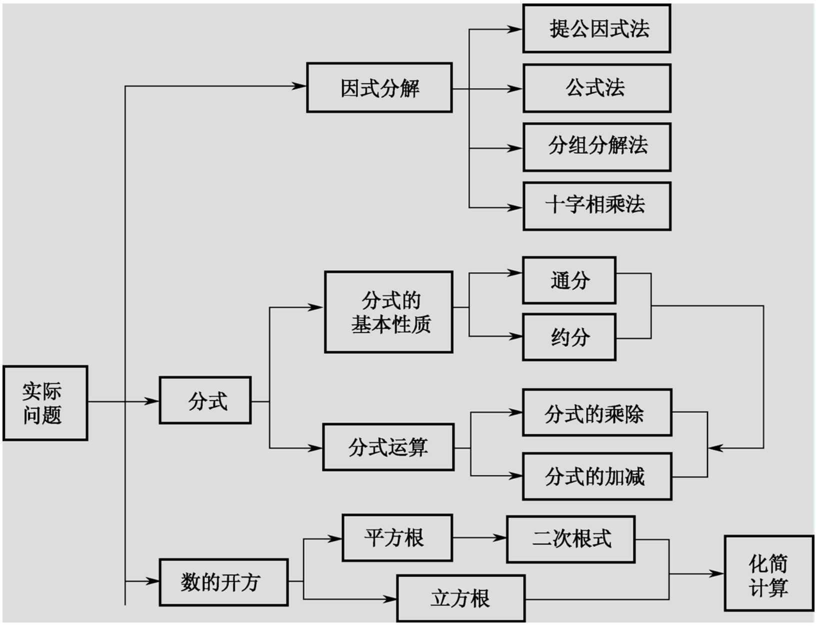
首先从最大的 x 着手，x 的绝对值不可能等于（或大于）15，因为 $15^2=225$，已超过了 211．那么，设 $x=14$，由于 $14^2=196$，于是 $y^2+z^2=211-196=15$，比

15 小的平方数只有 9，4，1 三个，显然它们是不可能满足 $y^2+z^2=15$ 这个方程的．再设 $x=13$，则 $x^2=169$，于是 $y^2+z^2=211-169=42$，比 42 小的平方数有 36，25，9，4，1，也容易看出，它们也是不能满足方程 $y^2+z^2=42$ 的．按照这种方法继续进行试验，发现当 $x=11$ 时，$y^2+z^2=90$，比 90 小的平方数中显然 81 和 9 满足此条件，即 $y=3$，$z=9$，这正是本题的唯一答案，即火鸡的单价是 11 先令，共买了 11 只，鸭的单价是 9 先令，共买了 9 只，鹅的单价是 3 先令，共买了 3 只．

答：火鸡的单价是 11 先令，鸭的单价是 9 先令，鹅的单价是 3 先令．

十四、因式分解、分式、数的开方

（1）因式分解、分式、数的开方重要内容的结构与联系：



（2）手算平方根：

①从个位起向左每隔两位为一节，若带有小数从小数点起向右每隔两位一节，用“′ ”号将各节分开；

②求不大于左边第一节数的平方根，为平方根最高位上的数；

③从左边第一节数里减去求得的最高位上的数的平方，在它们的差的右边写上第二节数作为第一个余数；

④把商的最高位上的数乘 20 去试除第一个余数，所得的是整数作试商（如果这个最大整数大于或等于 10，就用 9 或 8 作试商）；

⑤用最高位的数乘以 20 加上试商再乘以试商．如果所得的积小于或等于余数，这个试商就是平方根的第二位数；如果所得的积大于余数，就把试商逐次减小再试，直到积小于或等于余数为止；

⑥用同样的方法，继续求平方根的其他各位上的数．

（3）开平方、开立方数学公式：

求一个非负数的平方根的运算，叫开平方．

开平方公式：

$$x_{n+1}=x_n+\left(\frac{A}{x_n}-x_n\right)\frac{1}{2} \qquad (1)$$

开立方公式：

$$x_{n+1}=x_n+\left(\frac{A}{x_n^2}-x_n\right)\frac{1}{3} \qquad (2)$$

109. 巧算平方根

手算 12.5 的平方根.

解析：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3\ .\ 5\quad 3\quad 5 \\
 & \sqrt{12\ .\ 50'\ 00'\ 00} \\
 & 9 \\ \hline
65 & 3\ 50 \\
(20\times3+5) & 3\ 25 \\ \hline
703 & 25\ 00 \\
(20\times35+3) & 21\ 09 \\ \hline
7065 & 3\ 91\ 00 \\
(20\times353+5) & 3\ 53\ 25 \\ \hline
 & 37\ 75
\end{array}
$$

答：$\sqrt{12.5}\approx3.535$.

110. 逐步逼近法

利用公式开平方 $\sqrt{5}$

解析：A=5，5 介于 2 的平方至 3 的平方之间. 我们取初始值 2.1，2.2，2.3，2.4，2.5，2.6，2.7，2.8，2.9 都可以，我们最好取中间值 2.5.

第一步：$2.5+\left(\frac{5}{2.5}-2.5\right)\frac{1}{2}=2.2$；

即 $\frac{5}{2.5}=2$，2−2.5=−0.5，$-0.5\times\frac{1}{2}=-0.25$，2.5+（−0.25）=2.25，取 2 位数为 2.2

第二步：$2.2+\left(\frac{5}{2.2}-2.2\right)\frac{1}{2}=2.23$；

即 $\frac{5}{2.2}=2.272$，2.272−2.2=0.072，$0.072\times\frac{1}{2}=0.036$，2.2+0.036=2.23

取 3 位数为 2.23.

第三步：$2.23+\left(\dfrac{5}{2.23}-2.23\right)\dfrac{1}{2}=2.236$

即 $\dfrac{5}{2.23}=2.242$，2.242−2.23=0.012，$0.012\times\dfrac{1}{2}=0.006$，2.23+0.006=2.236

每一步多取一位数．这个方法又称反馈开方，即使输入一个错误的数值，也没有关系，输出值会自动调节，接近准确值．

答：$\sqrt{5}\approx 2.236$．

至于开立方，按公式（2）反馈开方（略）．

注：开平方用于数学计算中，是中国业余数学家王晓明于 1980 年推导出来的．这个公式的原理就是通过牛顿二项式定理在开方过程中转换成为牛顿切线法．

111．阿贝尔信封上的年月日

阿贝尔（N．H．Abel，1802—1829 年）是挪威著名的数学家，虽然他在世时间不长，但是他在数学领域却作出了巨大的贡献，仅以阿贝尔命名的数学名词就有 20 多个，为了纪念这位在数学上取得了杰出成就的数学家，2003 年，挪威政府设立了资金额为 80 万美元的数学终身成就奖——阿贝尔奖．

阿贝尔平时很善于动脑，据说有一次曾给他的中学数学老师洪保写过一封信，信封上的年月日写的是 $\sqrt[3]{6064321219}$．

同学们，你们知道阿贝尔写的日期是阳历何年何月何日吗？

解析：因为 $\sqrt[3]{6064321219}$ =1823.5908…（年），小数点以下是 365×0.5908 =215.64…（日），因为 1823 年是一个平年，到 7 月 31 日就度过了 212 天，因而可以说是 8 月 4 日中午．

答：阿贝尔写的日期是阳历 1823 年 8 月 4 日中午．

112．两名醉汉

一个醉汉拿着一根竹竿进城，横着怎么也拿不进去，量竹竿长比城门宽 4 米，旁边另一个醉汉嘲笑他，你没看城门高吗，竖着拿就可以进去啦，结果竖着比城门高 2 米，二人没办法，只好请教聪明人，聪明人教他们二人沿着门的对角斜着拿，二人一试，不多不少刚好进城，你知道竹竿有多长吗？

解析：设竹竿的长度为 x 米，则：$x^2=(x-4)^2+(x-2)^2=x^2-8x+16+x^2-4x+4=2x^2-12x+20$，

移项得：$x^2-12x+20=0$

配方得：$(x-6)^2=16$

$(x-6)=\pm4$

解得：$x_1=10$（米），$x_2=2$（米），由于 2 不符合标准，故舍去，故 $x=10$（米）.

答：竹竿长 10 米.

113. 数字推理趣题

已知 a，b，c，d 为非负整数，且 $ac+bd+ad+bc=1997$，则 $a+b+c+d=?$

解析：$ac+bd+ad+bc=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)=1997$

由于，1997 是质数，则 $a+b$，$c+d$ 只能是 1 或 1997.

所以 $a+b+c+d=1998$.

答：$a+b+c+d=1998$.

114. 象棋比赛

象棋比赛中，每个选手都与其他选手恰好比赛一局，每局赢者记 2 分，输者记 0 分．如果平局，两个选手各记 1 分，领司有四个同学统计了全部选手的得分总数，分别是 1979，1980，1984，1985．经核实，有一位同学统计无误．试计算这次比赛共有多少个选手参加．

解析：设共有 n 个选手参加比赛，每个选手都要与（$n-1$）个选手比赛一局，共计 n（$n-1$）局，但两个选手的对局从每个选手的角度各自统计了一次，因此实际比赛总局数应为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 局．由于每局共计2分，所以全部选手得分总共为 n（$n-1$）分．显然（$n-1$）与 n 为相邻的自然数，容易验证，相邻两自然数乘积的末位数字只能是0，2，6，故总分不可能是1979，1984，1985，因此总分只能是1980，于是由 n（$n-1$）$=1980$，得 $n^2-n-1980=0$，解得 $n_1=45$，$n_2=-44$（舍去）．

答：参加比赛的选手共有 45 人.

115. 八名男生献爱心

八名男生健雄、耀杰、皓轩、懿轩、浩宇、明哲、远航、伟祺、睿渊和建辉、泽洋前年暑假将勤工俭学挣得的班费 2000 元按一年定期存入银行．去年暑假到期后取出 1000 元寄往灾区，将剩下的 1000 元和利息继续按一年定期存入银行，待今年毕业后全部捐给母校．若今年到期后取得人民币（本息和）1155 元，问银行一年定期存款的年利率（假定利率不变）是多少？

——（1999•西安）

解析：设一年定期存款的年利率为 $x\%$，依题意列方程，得

$[2000(1+x\%)-1000](1+x\%)=1155$

$(1000+2000x\%)(1+x\%)=1155$

$1000+20x+10x+0.2x^2=1155$

$0.2x^2+30x-155=0$

$x^2+150x-775=0$

$(x-5)(x+155)=0$

得：$x_1=5$，$x_2=-155$（舍去）

答：一年定期存款的年利率为 5%.

116. 吉雅赛音与巴雅尔

爱写散文、诗歌的蒙古族哥哥吉雅赛音（好运）和善于经营弟弟巴雅尔（喜悦）经营一个木器加工厂．

今年 1 月份哥哥吉雅赛音管理，生产课桌 500 张，因管理不善，2 月份的产量减少了 10%，从 3 月份由吉雅赛音与巴雅尔管理，产量逐月上升，4 月份产量达到 648 张，求工厂 3 月份、4 月份的平均增长率．

解析：设工厂 3 月份、4 月份的平均增长率为 x.

由题意得:

$500(1-10\%)(1+x)(1+x)=648$

$450(1+x)(1+x)=648$

$(1+x)(1+x)=1.44$

$1+x=\pm1.2$

得：$x = 0.2$ 或 $x = -2.2$（舍）

答：工厂 3 月份、4 月份的平均增长率为 20％.

117. 促销的策略

有一批图形计算器，原价每台 800 元，在甲、乙两家公司销售，甲公司用如下方法促销：买一台单价为 780 元，买两台每台为 760 元，以此类推，即多买一台则所买各台单价再减 20 元，但最低不能低于每台 440 元，乙公司一律按原价的 75%促销，若某单位恰好花 7500 元，在同一家公司购买了一定数量的图形计算器，请问是在哪家公司买的，数量是多少？

解析：由于 7500÷（800×75%）=12.5（台），出现半台，所以不可能在乙公司买，所以只能在甲公司买.

设在甲买了 x 台，$(800-20x)\,x = 7500$，整理得：

$$x^2 - 40x + 375 = 0$$

分解因式：$(x-15)(x-25) = 0$

解得：$x_1 = 15$（台），$x_2 = 25$（台）

$x_2 = 25$ 时，单价=780−20×25=780−500=280 < 440，舍去；

$x_1 = 15$ 时，单价=780−20×15=780−300=480 > 440，符合题意.

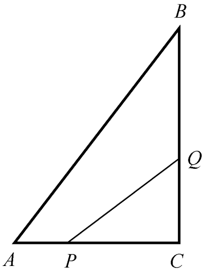
答：在甲公司买的，数量是 15 台.

118. P、Q 动点问题

如下页图所示，在△*ABC* 中，∠C=90°，*AC*=6 厘米，*BC*=8 厘米，点 *P* 从点 *A* 出发沿边 *AC* 向点 *C* 以 1 厘米/秒的速度移动，点 *Q* 从 *C* 点出发沿 *CB* 边向点 *B* 以 2 厘米/秒的速度移动.

（1）如果 *P*、*Q* 同时出发，几秒后，可使△*PCQ* 的面积为 8 平方厘米.

（2）点 *P*、*Q* 在移动过程中，是否存在某一时刻，使得△*PCQ* 的面积等于△*ABC* 的面积的一半. 若存在，求出运动的时间；若不存在，说明理由.



**解析**：因为$\angle C = 90°$，所以$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$（厘米）.

（1）设x s后，可使$\triangle PCQ$的面积为8平方厘米，所以$AP = x$厘米，$PC =（6-x）$厘米，$CQ = 2x$厘米.

则根据题意，得$\frac{1}{2}\bullet(6-x)\bullet 2x=8$．整理，得$x^2-6x+8=0$，十字相乘分解因式：$(x-2)(x-4)=0$．

解得：$x_1=2$，$x_2=4$．

答：P、Q同时出发，2s或4s后可使$\triangle PCQ$的面积为8平方厘米.

（2）设点P出发x s后，$\triangle PCQ$的面积等于$\triangle ABC$面积的一半.

则根据题意，得

$\frac{1}{2}(6-x)\bullet 2x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 6\times 8$，整理得：

$x^2-6x+12=0$

判别式$b^2-4ac=(-6)^2-4\times 12=-12<0$

答：由于此方程没有实数根，所以不存在使$\triangle PCQ$的面积等于$\triangle ABC$面积一半的时刻.

参 考 文 献

［1］邢书田，邢治．智慧星趣味数学（七年级）．天津：天津教育出版社，2007.1.

［2］邢书田，孙国斌．计量趣味数学（网络版）．山东：山东科技出版社，2007.8.

［3］余般石．国内外数学趣题集锦．上海：上海科技教育出版社，2002.6.

［4］傅立．数学悖论．北京：科学技术文学出版社，2005.7.

我超喜欢的趣味数学书 初中二年级

数学是打开科学大门的钥匙。

——（英）培　根

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

——（中）华罗庚

数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度，也正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活……

——（美）克莱因

拾撷古今数学智慧　感悟中外数学经典

启迪缜密数学思维　激发无限数学潜能

上架建议：初中数学课外读物

ISBN 978-7-121-20386-2

9 787121 203862

定价：22.80元

策划编辑：贾　贺　徐云鹏
责任编辑：张　京
封面设计：朝天世纪